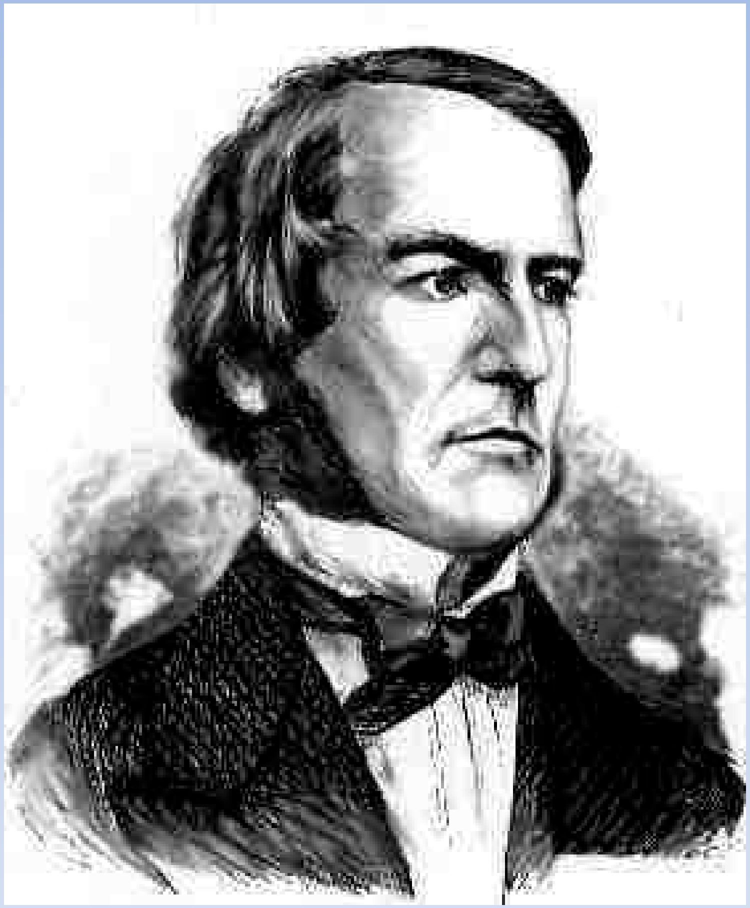
Kombinační automaty (logické obvody)
Booleovy zákony

Název školy: SPŠ Ústí nad Labem, středisko Resslova
Autor: Ing. Pavel Votrubec
Název: VY_32_INOVACE_01_CIT_03_Booleovy_zakony
Téma: Booleovy zákony
Číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.10.1036

Základy výrokové logiky

George Boole



Soudobé události ve světě v roce 1815:

- Britský vědec Peter Roget vynalezl logaritmické pravítko, které umožňovalo počítání logaritmů, což umožňovalo přímé umocňování a odmocňování.
- Česko 24. září – mechanik pražské polytechniky Josef Božek předvedl v Královské oboře veřejnosti vůz poháněný parním strojem.
- Francie: 18. června – bitva u Waterloo

Zdroj: http://cs.wikipedia.org/wiki/1815

Narozen 2. listopadu 1815 Lincoln, panství Lincolnshire, Anglie – a zemřel 8. prosince 1864 Ballintemple, Irsko) byl britský matematik a filosof, známý jako objevitel základů moderní aritmetiky, nazvané později Booleovou algebrou. Je považován za zakladatele informatiky, jakkoli v jeho době nebylo o počítačích ani uvažováno.

Zdroj: http://cs.wikipedia.org/wiki/George_Boole

Zdroj: http://forums.france2.fr/france2/jtfrance2/Le20heures/grosse-fortune-sujet_21496_2.htm

Vtip o profesoru Boole

Profesor Boole
na „lehkém obědě“
Drží nabídku Menu a
poroučí si:

Ne
Ne
Ano
Ne
Ne
Ano
Ano
Ne
Ne
Ne
Ano
…

Praktická aplikace logiky

Stojíte na křižovatce a před sebou máte chlapa z dvojčat. Předtím jste se v hospodě dozvěděl, že dvojčata ukazují cestu kudy kam. Problém je v tom, že jeden z dvojčat vždy lže a druhý mluví vždy pravdu. Jakou položíte otázku abyste se dozvěděl správnou cestu?

Správná otázka zní: „Jakou cestu by mi poradil tvůj bratr?“

Tři základní logické funkce podle George Boolea

1. Logická negace
2. Logický součet
3. Logický součin

ad1:

a	$\bar{a}$
0	1
1	0

$$f = \bar{a}$$

ad2:

a	b	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$f = a + b$$

ad3:

a	b	f
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$f = a * b$$

Zákony Booleovy algebry logiky

Zákony komutativní:

$A + B = B + A$ $\qquad$ $AB = B$A

Zákony asociativní

$A + (B + C) = (A + B) + C$ $\qquad$ $A(BC) = (AB)$C

Zákony distributivní

$A(B + C) = AB + AC$ $\qquad$ $A + BC = (A + B)(A$ +C)

Zákony idempotentní:

$A + A = A; A + "0" = A\ ; A + "I" = "I"$

$AA = A; A * "0" = "0";$ A*“I“=„A“

Zákony Booleovy algebry logiky

Zákony doplňku:

$A + \bar{A} = "I"$; $A * \bar{A} = "0„$

Zákon involuce

$A = \bar{\bar{A}}$

Zákony de Morgana

$\overline{A + B} = \bar{A} * \bar{B}$; $\overline{A * B} = \bar{A} + \bar{B}$

Zákony absorpce

$A * (A + B) = A$; $A + A * B = A$

Zákony absorpce negace

$A + \bar{A} * B = A + B$; $\bar{A} + A * B = \bar{A} + B$

$\bar{A} * (A + B) = \bar{A} * B$; $A * (\bar{A} + B) = A * B$

Příklady užití Booleových zákonů

Dokažte identitu:

1) $a\bar{b} + \bar{a}b + ac \equiv a\bar{b} + \bar{a}b + bc$

Zjednodušte:

2) $XY + \bar{X}Y\bar{Z} + YZ$ [Y]

3) $(X\bar{Y} + Z)(X + \bar{Y})Z$ $[ZX + Z\bar{Y}]$

4) $F = \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}bc\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}c\bar{d} + ab\bar{c}\bar{d} + abc\bar{d}$ $[\bar{d}(\bar{b} + a + c)]$

Řešení příkladu č.1

Dokažte identitu:

$$a\bar{b} + \bar{a}b + ac \equiv a\bar{b} + \bar{a}b + bc$$

$a\bar{b}(c + \bar{c}) + \bar{a}b(c + \bar{c}) + ac\left(\mathrm{b} + \bar{b}\right)$ užití zákona doplňku

$a\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}bc + \bar{a}b\bar{c} + abc + a\bar{b}c$ prosté roznásobení

$a\bar{b}(c + \bar{c} + c) + \bar{a}b(c + \bar{c}) + bc(\bar{a} + a)$ vytknutí

$a\bar{b} + \bar{a}b + bc$ užití zákona doplňku a idempotentního zákona

Dokázaná identita pomocí úprav Booleovými zákony

Jako příklad zkuste dokázat identitu úpravou pravé strany rovnice.

Řešení příkladu č.2

Zjednodušte:

$XY + \bar{X}Y\bar{Z} + YZ$ [Y]

$= Y(X + \bar{X}\bar{Z} + Z)$ užijeme zákon absorpce negace

$= Y(X + \bar{Z} + Z)$ užijeme zákon doplňku

$= Y(X + "I")$ užijeme zákon idempotentní

$= Y$

Řešení příkladu č.3

$(X\bar{Y} + Z)(X + \bar{Y})Z \qquad [ZX + Z\bar{Y}]$

$= ZX\bar{Y} + ZX\bar{Y} + ZX + Z\bar{Y}$; roznásobíme vše

$= Z(X\bar{Y} + X\bar{Y} + X + \bar{Y})$; vytkneme Z

$= Z(X\bar{Y} + X + X\bar{Y} + \bar{Y})$; užijeme zákon komutativní

= $Z(X + \bar{Y})$; užijeme zákon absorpce

$= ZX + Z\bar{Y}$; roznásobíme a máme výsledek

Řešení příkladu č.4

$F = \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}bc\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}c\bar{d} + ab\bar{c}\bar{d} + abc\bar{d}$ $[\bar{d}(\bar{b} + a + c)]$

$= \bar{d}(\bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}bc + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc) =$

$= \bar{d}(\bar{b}(\bar{a}\bar{c} + \bar{a}c + a\bar{c} + ac) + a(\bar{b}\bar{c} + \bar{b}c + b\bar{c} + bc) + c(\bar{a}\bar{b} + \bar{a}b + a\bar{b} + ab)) =$

$= \bar{d}(\bar{b}(\bar{a}(\bar{c} + c) + a(\bar{c} + c)) + a(\bar{b}(\bar{c} + c) + b(\bar{c} + c)) + c(\bar{a}(\bar{b} + b) + a(\bar{b} + b))) =$

$= \bar{d}(\bar{b}(\bar{a} + a) + a(\bar{b} + b) + c(\bar{a} + a)) =$

$= \bar{d}(\bar{b} + a + c)$