TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Hálkova 6, 461 17 Liberec 1, CZ

Fakulta mechatroniky a mezioborových inženýrských studií

Teorie automatického řízení I.

ZPĚTNÁ TRANSFORMACE RACIONÁLNĚ LOMENÉ FUNKCE

Studijní materiály

Doc. Ing. Osvald Modrlák, CSc.

Katedra řídicí techniky

Obsah

1. ZPĚTNÁ TRANSFORMACE RACIONÁLNĚ LOMENÉ FUNKCE

Zpětnou transformaci Laplaceova obrazu (dále jen L-obraz) je možno provést

1) Podle definičního integrálu zpětné Laplaceovy transformace

$$\boxed{L^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Y(s)e^{st}\,ds = y(t),}$$

kde c je přímka, pro kterou platí $y(t) \le e^{ct}$ pro $t \ge 0$.

2) Rozkladem racionálně lomené funkce $Y(s)$ na parciální zlomky

Při analýze regulačních obvodů mají L-obrazy zpravidla tvar racionálně lomené funkce tvaru

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)}, \tag{1}$$

kde $A(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = a_n(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)$;

$B(s) = b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0$

$s_1, s_2, \ldots, s_n$ jsou obecně různé komplexní nebo reálné kořeny jmenovatele,

n, m jsou stupně polynomů $A(s)$, $B(s)$, $m < n$.

Každou racionální lomenou funkci, jejíž čitatel je nižšího stupně než jmenovatel, je možno rozložit na součet konečného počtu zlomků typu

$$\frac{A_i}{s-s_i}; \quad \frac{B_k}{(s-s_i)^k};$$

kde s_i jsou obecně reálné nebo komplexně sdružené kořeny jmenovatele

A_i, B_k jsou konstanty.

Uvedené parciální zlomky jsou však L-obrazy známých předmětů

$$\boxed{\frac{A_i}{s-s_i} = L\left\{A_i e^{s_i t}\right\};} \quad \boxed{\frac{B_k}{(s-s_i)^k} = L\left\{B_k \frac{t^{k-1}e^{s_i t}}{(k-1)!}\right\};} \tag{2, 3}$$

Rozkladem na parciální zlomky rozložíme L-obraz na součet dílčích obrazů

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) + \cdots + Y_n(s)$$

a předmět je pak roven součtu dílčích předmětů

$$L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\{Y_1(s)\} + L^{-1}\{Y_2(s)\} + \cdots + L^{-1}\{Y_n(s)\} \;\hat{=}\; y_1(t) + y_2(t) + \cdots + y_n(t) = y(t).$$

1) Kořeny reálné různé

Uvažujme Laplaceův obraz (dále jen L-obraz) ve tvaru

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{a_n(s-s_1)\cdot(s-s_2)\cdots(s-s_n)}, \qquad \text{(P3 – 1)}$$

kde $A(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$; $B(s) = b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0$

$s_1, s_2, ..., s_n$ jsou obecně různé komplexní nebo reálné kořeny jmenovatele,

n, m jsou stupně polynomů $A(s)$, $B(s)$, $m < n$.

Racionální lomenou funkci $Y(s)$ je možno rozložit na součet racionálních zlomků

$$\boxed{Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{A_1}{(s-s_1)} + \frac{A_2}{(s-s_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(s-s_n)} = \frac{B(s)}{a_n(s-s_1)\cdot(s-s_2)\cdots(s-s_n)},} \qquad \text{(P3 – 2)}$$

kde A_i $(i = 1,2, ..., a)$ jsou konstanty. Konstanty A_i je možno určit tak, že levá i pravá strana rovnosti (1 – 2) se vynásobí kořenovým činitelem $(s - s_i)$ a pro $s = s_i$ dostaneme

$$\left[(s-s_i)\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=si} = (s-s_i)\frac{A_1}{(s-s_1)} + (s-s_i)\frac{A_2}{(s-s_2)} + \cdots + (s-s_i)\frac{A_i}{(s-s_i)} + \cdots + (s-s_i)\frac{A_n}{(s-s_n)},$$

Po vykrácení dostaneme

$$\boxed{A_i = \left[(s-s_i)\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=si} = \frac{B(s_i)}{a_n(s_i-s_1)\cdot(s_i-s_2)\cdots(s_i-s_n)}}. \qquad \text{(P3 – 3)}$$

Příklad P3.1

Nalezněte předmět k L-obrazu $Y(s) = \dfrac{s-1}{s(s+1)(s+2)}$.

Řešení: Rozklad na parciální zlomky L-obrazu Y(s) $(s_1 = 0, s_2 = -1, s_2 = -2)$ zapíšeme do tvaru

$$Y(s) = \frac{s-1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{A_3}{s+2},$$

konstanty A_1, A_2, A_3 určíme podle (P3 – 3) : $A_1 = \left[(s-0)\dfrac{s-1}{s(s+1)(s+2)}\right]_{s=0} = -\dfrac{1}{2},$

$$A_2 = \left[(s+1)\frac{s-1}{s(s+1)(s+2)}\right]_{s=-1} = 2, \quad A_3 = \left[(s+2)\frac{s-1}{s(s+1)(s+2)}\right]_{s=-2} = -\frac{3}{2}.$$

Předmět $y(t)$ je roven

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}\right\} + L^{-1}\left\{2\cdot\frac{1}{s+1}\right\} + L^{-1}\left\{-\frac{3}{2}.\frac{1}{s+2}\right\} = \left[-0{,}5 + 2e^{-t} - 1{,}5e^{-2t}\right]\cdot 1(t),$$

kde $1(t)$ je jednotkový skok.

Konec příkladu

2) Kořeny násobné

Uvažujeme, že kořen s_i je násobnosti „*p*“, pak L-obraz je možno zapsat ve tvaru.

$$Y(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{B(s)}{a_n(s-s_1)\cdot(s-s_2)\cdots(s-s_{n-p})(s-s_i)^p},$$

Rozklad na parciální zlomky pak musí míti tvar

$$\boxed{Y(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{A_1}{(s-s_1)}+\frac{A_2}{(s-s_2)}+\cdots+\frac{A_{n-r}}{(s-s_{n-r})}+\frac{B_1}{(s-s_i)}+\frac{B_2}{(s-s_i)^2}+\cdots+\frac{B_r}{(s-s_i)^r}}. \tag{P3 – 4}$$

Koeficienty parciálních zlomků B_k odpovídající násobným kořenům určíme z rovnic

$$\begin{aligned}
B_r &= \left[(s-s_i)^r\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=s_i}\\
B_{r-1} &= \frac{d}{ds}\left[(s-s_i)^r\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=s_i}\\
B_{r-2} &= \frac{1}{2!}\cdot\frac{d^2}{ds^2}\left[(s-s_i)^r\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=s_i}\\
&\ \ \vdots\\
B_1 &= \frac{1}{(r-1)!}\cdot\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}}\left[(s-s_i)^r\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=s_i}
\end{aligned} \tag{P3 – 5}$$

Příklad P3.2

Nalezněte předmět k L-obrazu $Y(s)=\dfrac{1}{s(s+1)^3}$.

Řešení: Kořeny jmenovatele jsou: $s_1=0$ jednonásobný, $s_2=s_3=s_4=-1$ trojnásobný, rozklad na parciální zlomky má tvar

$$Y(s)=\frac{1}{s(s+1)^3}=\frac{A_1}{s}+\frac{B_1}{(s+1)}+\frac{B_2}{(s+1)^2}+\frac{B_3}{(s+1)^3}.$$

Koeficienty A_1 budou vypočteny podle (P3 - 3), koeficienty B_3, B_2, B_1 podle (P3 – 5),

$$A_1=\left[s\cdot\frac{1}{s(s+1)^3}\right]_{s=0}=1,\quad B_3=\left[(s+1)^3\frac{1}{s(s+1)^3}\right]_{s=-1}=-1,$$

$$B_2 = \frac{d}{ds}\left[(s+1)^3 \frac{1}{s(s+1)^3}\right]_{s=-1} = \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s}\right]_{s=-1} = \left[\frac{-1}{s^2}\right]_{s=-1} = -1$$

$$B_1 = \frac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3 \frac{1}{s(s+1)^3}\right]_{s=-1} = \frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{1}{s}\right]_{s=-1} = \left[\frac{2}{s^3}\right]_{s=-1} = -2$$

Předmět je dán součtem dílčích předmětů, které přísluší jednotlivým parciálním zlomkům

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{2}{s+1}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^3}\right\} = \left[1 - 2e^{t} - te^{-t} - 0{,}5t^2e^{-t}\right]\cdot 1(t).$$

Konec příkladu

3) Kořeny komplexní

a) Rozklad na parciální zlomky podle (P3 – 2).

Uvažujeme L-obraz, který obsahuje v polynomu jmenovatele jeden reálný kořen s_1 a jeden komplexní kořen, pro který platí

$s_i = \alpha + i\omega$; $\bar{s}_i = \alpha - i\omega$, kde kořen $\bar{s}_i$ je kořen komplexně sdružený.

Racionální lomenou funkci *Y(s)* je pak možno rozložit na součet racionálních zlomků

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{a_3(s-s_1)\cdot(s-s_2)\cdot(s-\bar{s}_2)\cdot} = \frac{A_1}{(s-s_1)} + \frac{C}{(s-s_2)} + \frac{\bar{C}}{(s-\bar{s}_2)}, \qquad \text{(P3 – 6)}$$

kde C je komplexní konstanta a $\bar{C}$ je komplexně sdružená, které se určí podle (P3 – 3). Komplexní konstanty je možno vyjádřit ve tvaru

$$C = a + ib = |C|e^{i\varphi}\,,\ kde\ |C| = \sqrt{a^2+b^2}\,,\ \varphi = arctg\frac{b}{a},$$
$$\bar{C} = a - ib = |C|e^{-i\varphi}. \qquad \text{(P3 – 7)}$$

Předmětu *y(t)* je pak roven

$$y(t) = A_1 \exp(s_1 t) + C\exp(s_2 t) + \bar{C}\exp(\bar{s}_2 t)$$

Člen $\{C\exp(s_2 t) + \bar{C}\exp(\bar{s}_2 t)\}$, který respektuje účinek komplexních kořenů můžeme upravit do tvaru

$$C\exp(s_2 t) + \bar{C}\exp(\bar{s}_2 t) = |C|e^{i\varphi}\exp((\alpha+i\omega)t) + |C|e^{-i\varphi}\exp((\alpha-i\omega)t) =$$
$$= |C|e^{\alpha t}(e^{i(\omega t+\varphi)} + e^{-i(\omega t+\varphi)}) = 2|C|e^{\alpha t}\cdot\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\boxed{Poznámka: \quad \cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}; \quad \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i};}$$

Platí tedy

$$\boxed{C\exp(s_2 t) + \overline{C}\exp(\overline{s}_2 t) = 2|C|\cdot e^{\alpha t}\cdot\cos(\omega t+\varphi)} \qquad (P3 \; - \; 8)$$

Předmět je pak roven; $\qquad y(t) = A_1\exp(s_1 t) + 2|C|e^{\alpha t}\cdot\cos(\omega t+\varphi)$

Příklad P3.3

Nalezněte předmět k L-obrazu $Y(s) = \dfrac{2}{s(s+1)(s^2+2s+2)}$.

Řešení: Reálné kořeny jmenovatele jsou: $s_1 = 0$, $s_2 = -1$, komplexní $s_3 = -1+i$ a komplexně sdružený $s_4 = -1-i$. Rozklad na parciální zlomky má tvar

$$Y(s) = \frac{2}{s(s+1)\cdot(s+1+i)\cdot(s+1-i)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{(s+1)} + \frac{C}{(s+1+i)} + \frac{\overline{C}}{(s+1-i)},$$

kde pro $s_1 = 0$ je $A_1 = \left[s\cdot\dfrac{2}{s(s+1)(s^2+2s+2)}\right]_{s=0} = 1$

$s_2 = -1$ je $A_2 = \left[(s+1)\dfrac{2}{s(s+1)(s^2+2s+2)}.\right]_{s=-1} = -2.$

$s_3 = -1+i$ je $C = \left[(s+1+i)\dfrac{2}{s(s+1)\cdot(s+1+i)\cdot(s+1-i)}.\right]_{s=-1+i} = \dfrac{1+i}{2}.$

$s_3 = -1+i$ je $\overline{C} = \left[(s+1-i)\dfrac{2}{s(s+1)\cdot(s+1+i)\cdot(s+1-i)}.\right]_{s=-1-i} = \dfrac{1-i}{2}.$

Podle (P3 – 7) platí

$$C = a+ib = |C|e^{i\varphi}\text{, } kde\, |C| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{0{,}5^2+0{,}5^2} = \sqrt{0{,}5};\ \varphi = arctg\frac{b}{a} = arctg\,1 = \frac{\pi}{4},$$

$$\overline{C} = a-ib = |C|e^{-i\varphi}.$$

Dosazením do (P3 – 8) dostaneme předmět pro parciální zlomky s komplexními kořeny ve tvaru

$$\frac{C}{(s+1+i)} + \frac{\overline{C}}{(s+1-i)} \;\hat{=}\; (0{,}5+0{,}5i)\exp[(-1+i)t] + (0{,}5-0{,}5i)\exp[(-1-i)t] =$$
$$= 2\sqrt{0{,}5}\cdot e^{-t}\cdot\cos(t+\pi/4)$$

Výsledný předmět je pak roven je pak dán součtem

$$L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s} + \frac{-2}{(s+1)} + \frac{0{,}5+0{,}5i}{(s+1+i)} + \frac{0{,}5-0{,}5i}{(s+1-i)}\right\} = \left[1-2e^{-t}+2\cdot\sqrt{0{,}5}e^{-t}\cos(t+\pi/4)\right]\cdot 1(t)\,.$$

Konec příkladu

b) Rozklad na zlomky typu $\dfrac{Ms+N}{s^2+ps+q}$

Jsou-li komplexně sdružené kořeny nenásobné, pak se v rozkladu mohou objevit zlomky typu

$$\frac{Ms+N}{s^2+ps+q} \text{ nebo pro r-násobný komplexní kořen } \frac{Ms+N}{(s^2+ps+q)^r}. \qquad \text{(P3 – 9a,b)}$$

Na základě znalostí L-obrazu funkcí

$$L\{e^{-\alpha t}\cos\omega t\} = \frac{(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2+\omega^2}; \quad L\{e^{-\alpha t}\sin\omega t\} = \frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2};$$

můžeme určit předmět ke zlomku prvního typu pomocí jednoduchých úprav

$$\frac{Ms+N}{s^2+ps+q} = \frac{M(s+\frac{p}{2})+N-M\frac{p}{2}}{(s+\frac{p}{2})^2-\frac{p^2}{4}+q} =$$
$$= M\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2} + K\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2} \mathrel{\hat{=}} Me^{\alpha t}\cos\omega t + Ke^{\alpha t}\sin\omega t, \qquad \text{(P3 – 10)}$$
$$kde \quad \alpha = \frac{p}{2};\ \omega = \sqrt{-\frac{p^2}{4}+q};\ K = \frac{N-M\frac{p}{2}}{\sqrt{-\frac{p^2}{4}+q}}$$

Výraz (P3 – 10) je možno vyjádřit ve tvaru $Ae^{\alpha t}\cos(\omega t+\varphi)$. Nejdříve upravíme (P3 – 10) do tvaru

$$Me^{\alpha t}\cos\omega t + Ke^{\alpha t}\sin\omega t = e^{\alpha t}\left(M\cdot\cos\omega t + K\cdot\sin\omega t\right) \qquad \text{(P3 – 10a)}$$

Kosinus součtu dvou úhlů je roven

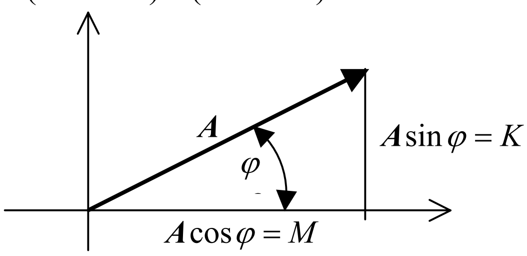
$$\cos(\alpha+\varphi) = \cos\alpha\cdot\cos\varphi - \sin\alpha\cdot\sin\varphi,$$

vynásobíme-li tuto rovnost hledanou amplitudou *A* dostaneme

$$A\cos(\alpha+\varphi) = A\cos\alpha\cdot\cos\varphi - A\sin\alpha\cdot\sin\varphi. \qquad \text{(P3 – 10b)}$$

Označíme-li $\alpha = \omega t$ a porovnáme-li členy v (P3 – 10a) a (P3 – 10b) dostaneme rovnici pro výpočet úhlu φ.

$$A\cdot\cos\varphi = M \rightarrow \varphi = arctg\frac{K}{M}.$$
$$A\cdot\sin\varphi = K$$



Obr.P3-1 *Určení amplitudy **A***

Podle obr.P3-1 pro amplitudu platí

$$A^2 = (A\cos\varphi)^2 + (A\sin\varphi)^2 \rightarrow A = \sqrt{M^2 + K^2}$$

Dynamické účinky komplexního sdruženého kořene v časové oblasti je možno vyjádřit členy

$$\boxed{\begin{array}{l} Me^{\alpha t}\cos\omega t + Ke^{\alpha t}\sin\omega t = e^{\alpha t}\left(M\cdot\cos\omega t + K\cdot\sin\omega t\right) = Ae^{\alpha t}\cos(\omega t+\varphi), \\ \text{kde } \varphi = arctg\dfrac{K}{M}; \quad A = \sqrt{M^2+K^2} \end{array}} \qquad (P3-11)$$

Příklad P3.4

Nalezněte předmět k L-obrazu $Y(s) = \dfrac{2}{s(s+1)(s^2+2s+2)}$ rozkladem na parciální zlomky. Pro komplexní kořeny uvažujte rozklad na parciální zlomky tak, aby ve jmenovateli byl kvadratický dvojčlen.

Řešení: Kořeny jmenovatele jsou: $s_1 = 0$, $s_2 = -1$, komplexní $s_3 = -1+i$ a komplexně sdružený $s_4 = -1-i$. Kvadratický dvojčlen je roven

$$(s+1+i)(s+1-i) = s^2 + 2s + 2.$$

Rozklad na parciální zlomky má tvar

$$Y(s) = \frac{2}{s(s+1)(s^2+2s+2)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{Ms+N}{(s^2+2s+2)}. \qquad (P3-12)$$

Hledané koeficienty A_1, A_2, M, N určíme metodou neurčitých koeficientů, tak že levou i pravou stranu rovnosti (P3 – 12) vynásobíme polynomem $s(s+1)(s^2+2s+2)$ a dostaneme rovnost ve tvaru

$$2 = A_1(s+1)(s^2+2s+2) + A_2 s(s^2+2s+2) + (Ms+N)s(s+1)$$

Roznásobením dostaneme

$$2 = A_1(s^3+3s^2+4s+2) + A_2(s^3+2s^2+2s) + M(s^3+s^2) + N(s^2+s). \qquad (P3-13)$$

Porovnáme-li koeficienty u mocnin s^i na levé a pravé straně rovnosti (P3 – 13), dostaneme soustavu rovnic pro koeficienty A_1, A_2, M, N ve tvaru (A_2 je možno spočítat podle (P3 – 3) a je rovno $A_2=-2$)

$$\begin{array}{ll} Mocnina\ \ s^0: 2 = 2A_1 & \rightarrow\ A_1 = 1 \\ Mocnina\ \ s^1: 0 = 4A_1 + 2A_2 + N & \rightarrow\ N = -4A_1 - 2A_2 = 0 \\ Mocnina\ \ s^2: 0 = 3A_1 + 2A_2 + N + M & \rightarrow\ 2A_2 = -3A_1 - N - M = -4 \\ Mocnina\ \ s^3: 0 = A_1 + A_2 + M & \rightarrow\ M = -A_1 - A_2 = -1 + 2 = 1 \end{array}$$

Dosazením koeficientů do rovnosti (P3 – 12) dostaneme L-obraz ve tvaru

$$Y(s) = \frac{2}{s(s+1)(s^2+2s+2)} = \frac{1}{s} + \frac{-2}{s+1} + \frac{s}{(s^2+2s+2)}.$$

Třetí zlomek upravíme podle (P3 – 10) do tvaru

$$\frac{s}{(s^2+2s+2)} = \frac{(s+1)-1}{(s+1)^2+1} = \frac{(s+1)}{(s+1)^2+1} - \frac{1}{(s+1)^2+1} \mathrel{\hat{=}} e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t$$

Předmět *y(t)* je tedy roven

$$L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{-2}{s+1}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+2s+2)}\right\} = \left[1 - 2e^{-t} + e^{-t}(\cos t - \sin t)\right]\cdot 1(t).$$

Pomocí (P3 – 12) můžeme ještě pro třetí člen vyjádřit amplitudu *A* a fázový posun φ tohoto předmětu. Je zřejmé, že platí

$$Me^{\alpha t}\cos\omega t + Ke^{\alpha t}\sin\omega t = e^{\alpha t}\left(M\cdot\cos\omega t + K\cdot\sin\omega t\right) = e^{-t}(\cos t - \sin t) \to A\cos\varphi = 1;\ A\sin\varphi = 1$$

$$kde\ \varphi = arctg\frac{K}{M} = arctg\,1 = \pi/4\,;\quad A = \sqrt{M^2+K^2} = \sqrt{2}$$

Výsledný předmět je pak možno vyjádřit ve tvaru:

$$y(t) = \left[1 - 2e^{-t} + e^{-t}\sqrt{2}\cdot\cos(t+\pi/4)\right]\cdot 1(t).$$

Konec příkladu

Literatura

[1] Pírko, Z., Veit, J.: Laplaceova transformace. Základy teorie a užití v elektrotechnice. SNTL, Praha, 1970.

[2] Mačák, K., Tumajer, F., Zelinka, B.: Matamatika III. (Matematická analýza). Skripta, VŠST Liberec, 1978.

[3] Aramanovič, I, G., Lunc, G., L., Elsgolz, L., E.: Funkce komplexnej premenej, Operátorový počet – teória stability. ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1973.