

Úvod do automatizace 02

Základní matematické nástroje automatizace

Laplaceova transformace

Je úžasný nástroj pro jednodušší nalezení řešení diferenciálních rovnic.

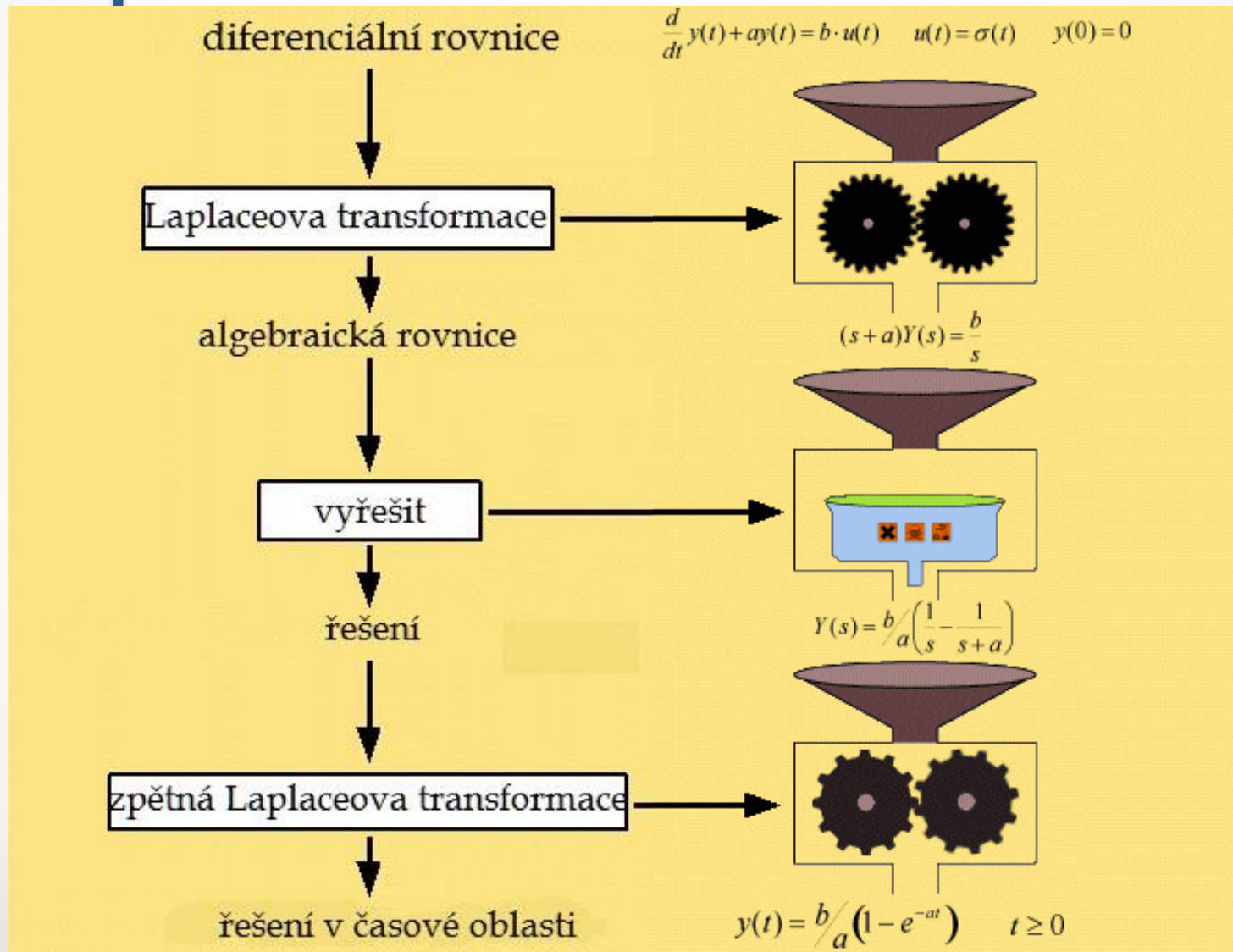
Potřebujete k tomu

- Věty Laplaceovy transformace
- Laplaceův slovník
- Umět nalézt kořeny algebraické rovnice

Poznámka:

(nám bude bohatě stačit umět řešit kvadratickou rovnici, tedy umět vypočítat kořeny kvadratické rovnice, což se mimochodem učí už v matematice na základní škole)

Laplaceova transformace



Laplaceova transformace

Tak začneme.

1. *Vezmeme matematický popis fyzikální dynamické soustavy, což je pro nás lineární diferenciální rovnice (**LDR**).*

Příklad: soustava druhého řádu popsaná LDR

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

aplikujeme věty Laplaceovy transformace

$$L\{a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y(t) = b_0 u(t)\}$$

Po Laplaceově transformaci získáme algebraickou rovnici druhého řádu

$$a_2 s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_0 U(s)$$

Laplaceova transformace

Možná na začátku použijeme konkrétní reálná čísla pro vytvoření představy

- 1. Vezmeme matematický popis fyzikální dynamické soustavy, což je pro nás lineární diferenciální rovnice (LDR).*

Příklad: soustava druhého řádu popsaná LDR

$$4y'' + 4y' + 2y(t) = 2u(t)$$

aplikujeme věty Laplaceovy transformace

$$L\{4y'' + 4y' + 2y(t) = 2u(t)\}$$

Po Laplaceově transformaci získáme algebraickou rovnici druhého řádu

$$4s^2Y(s) + 4sY(s) + 2Y(s) = 2U(s)$$

A když vyřešíme kvadratickou rovnici, tak získáme i kořeny dvojčlené algebraické rovnice a tím i jednotlivé členy algebraické rovnice

$$Y(s)(2s + 1)(2s + 1) = 2U(s)$$

Laplaceova transformace

Laplaceova transformace L přiřazuje funkci $f(t)$ pro čas $t \geq 0$ funkci $F(s)$

$$L\{f(t)\} = F(s)$$

To samozřejmě platí i pro funkci popsanou jiným písmenem

Například budeme používat:

$$L\{y(t)\} = Y(s)$$

$$L\{u(t)\} = U(s)$$

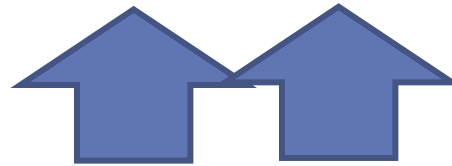
$$L\{g(t)\} = G(s)$$

$$L\{h(t)\} = H(s)$$

Laplaceova transformace

Příklad na aplikaci Laplaceovy věty o obraze (a věta o linearitě)

$$L\{a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y(t) = b_0 u(t)\}$$



Tady jsou obrazy funkcí

$$a_0 Y(s) = b_0 U(s)$$

Laplaceova transformace

Věty Laplaceovy transformace:

- *Věta o obrazu první derivace*
- *Věta o obrazu n -té derivace*
- *Věta o obrazu integrálu*
- *Věta o linearitě*
- *Věta o posunutí v originále (tzv. dopravní zpoždění)*

Laplaceova transformace

Věty Laplaceovy transformace:

Věta o obrazu první derivace

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

převádí derivaci v originále na násobení v obraze

A protože my v automatizaci budeme používat nulové počáteční podmínky $f(0) = 0$

Tak naše výsledná věta o první derivaci bude jednodušší

$$L\{f'(t)\} = sF(s)$$

Laplaceova transformace

Příklad na aplikaci Laplaceovy věty o první derivaci

$$L\{a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y(t) = b_0 u(t)\}$$



Tady je první derivace

$$L\{a_1 y'\} = a_1 s Y(s)$$

Laplaceova transformace

Věty Laplaceovy transformace:

Věta o obrazu n -té derivace

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) \dots$$

Tak naše výsledná věta o n -té derivaci bude mnohem jednodušší

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s)$$

Laplaceova transformace

Příklad na aplikaci Laplaceovy věty o n -té (v tomto případě druhé) derivaci

$$L\{a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y(t) = b_0 u(t)\}$$



Tady je druhá derivace

$$L\{a_1 y''\} = a_1 s^2 Y(s)$$

Laplaceova transformace

Věty Laplaceovy transformace:

Věta o obrazu integrálu

$$L \left\{ \int_0^t f(t) dt \right\} = \frac{1}{s} F(s)$$

převádí integraci v originále na dělení v obraze

Laplaceova transformace

Věty Laplaceovy transformace:

Věta o linearitě

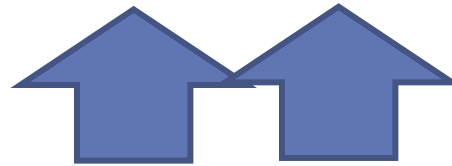
$$L\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s)$$

V případě že a, b jsou konstanty a $f(t), g(t)$ funkce, jejichž Laplaceovy obrazy jsou $F(s), G(s)$

Laplaceova transformace

Příklad na aplikaci Laplaceovy věty o linearitě

$$L\{a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y(t) = b_0 u(t)\}$$



Tady jsou obrazy funkcí s využitou větou o linearitě

$$a_0 Y(s) = b_0 U(s)$$

Laplaceova transformace

Věty Laplaceovy transformace:

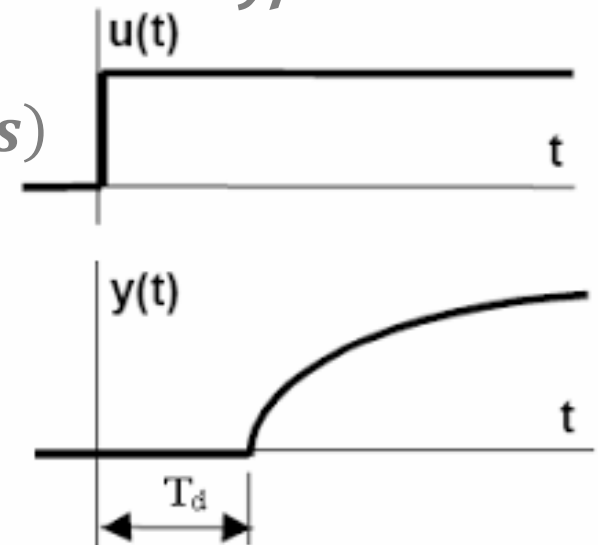
Věta o posunutí v originále (tzv. dopravní zpoždění)

$$L\{f(t - a)\} = e^{-as}F(s)$$

A když se to použije pro dopravní zpoždění tak to vypadá takto

$$L\{f(t - T_d)\} = e^{-T_d s}F(s)$$

Příčemž T_d je dopravní zpoždění v [s].



Laplaceova transformace

Příklady:

Použij Laplaceovy věty

$$1) 2y' + 6y(t) = 2u(t) \xrightarrow{\text{L}} L\{2y' + 6y(t) = 2u(t)\} \xrightarrow{\text{L}} 2sY(s) + 6Y(s) = 2U(s)$$

$$2) 2y'' + 8y' + 8y(t) = 10u(t) \xrightarrow{\text{L}} L\{2y'' + 8y' + 8y(t) = 10u(t)\} \\ \xrightarrow{\text{L}} 2s^2Y(s) + 8sY(s) + 8Y(s) = 10U(s)$$

$$3) 2y''' + 12y'' + 22y' + 12y(t) = 2u(t) \xrightarrow{\text{L}} L\{2y''' + 12y'' + 22y' + 12y(t) = 2u(t)\} \\ \xrightarrow{\text{L}} 2s^3Y(s) + 12s^2Y(s) + 22sY(s) + 12Y(s) = 2U(s)$$

$$4) 3y''' + 18y'' + 33y' + 18y(t) = 12u(t) + 3u'(t) \\ \xrightarrow{\text{L}} L\{3y''' + 18y'' + 33y' + 18y(t) = 12u(t) + 3u'(t)\} \\ \xrightarrow{\text{L}} 3s^3Y(s) + 18s^2Y(s) + 33sY(s) + 18Y(s) = 12U(s) + 3sU(s)$$

Laplaceova transformace

Příklady:

Použij Laplaceovy věty

$$1) 2y' + 6y(t) = 2u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} L\{2y' + 6y(t) = 2u(t)\} \xrightarrow{\mathcal{L}} 2sY(s) + 6Y(s) = 2U(s)$$

$$\Rightarrow Y(s)(2s + 6) = 2U(s)$$

$$\Rightarrow 2Y(s)(s + 3) = 2U(s)$$

$$\Rightarrow Y(s)(s + 3) = U(s)$$

Laplaceova transformace

Příklady:

Použij Laplaceovy věty

$$2) 2y'' + 8y' + 8y(t) = 10u(t) \xrightarrow{\text{L}} L\{2y'' + 8y' + 8y(t) = 10u(t)\}$$

$$\xrightarrow{\text{L}} 2s^2Y(s) + 8sY(s) + 8Y(s) = 10U(s)$$

$$\xrightarrow{\quad} 2Y(s)(s^2 + 4s + 4) = 10U(s)$$

$$\xrightarrow{\quad} 2Y(s)(s^2 + 4s + 4) = 10U(s)$$

$$\xrightarrow{\quad} 2Y(s)(s + 2)^2 = 10U(s)$$

$$\xrightarrow{\quad} Y(s)(s + 2)^2 = 5U(s)$$

Laplaceova transformace

Příklady:

Použij Laplaceovy věty

$$3) 2y''' + 12y'' + 22y' + 12y(t) = 2u(t) \xrightarrow{L} L\{2y''' + 12y'' + 22y' + 12y(t) = 2u(t)\}$$

$$\xrightarrow{L} 2s^3Y(s) + 12s^2Y(s) + 22sY(s) + 12Y(s) = 2U(s)$$

$$\xrightarrow{\quad} 2Y(s)[s^3 + 6s^2 + 11s + 6] = 2U(s)$$

$$\xrightarrow{\quad} 2Y(s)(s + 1)(s + 2)(s + 3) = 2U(s)$$

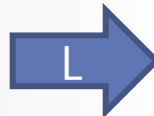
$$\xrightarrow{\quad} Y(s)(s + 1)(s + 2)(s + 3) = U(s)$$

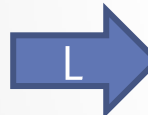
Laplaceova transformace

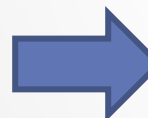
Příklady:


Použij Laplaceovy věty

$$4) 3y''' + 18y'' + 33y' + 18y(t) = 3u'(t) + 12u(t)$$


$$L\{3y''' + 18y'' + 33y' + 18y(t) = 3u'(t) + 12u(t)\}$$


$$3s^3Y(s) + 18s^2Y(s) + 33sY(s) + 18Y(s) = 3sU(s) + 12U(s)$$


$$3Y(s)\{s^3 + 6s^2 + 11s + 6\} = 3U(s)(s + 4)$$


$$3Y(s)(s + 1)(s + 2)(s + 3) = 3U(s)(s + 4)$$

Použitá literatura

[1] Ivan Švarc, Branislav Lacko, Ing. Zdeněk Němec, AUTOMATIZACE vydavatelství PC-DIR s.r.o 1995

[2] František Plíšek, Diplomová práce: ŘÍZENÍ NEKMITAVÝCH REGULOVANÝCH SOUSTAV S DOPRAVNÍM ZPOŽDĚNÍM, Brno 2009 https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=17293