

# Úvod do automatizace 03

Základní matematické nástroje automatizace

# Laplaceova transformace

Příklady:

Použij Laplaceovy věty

$$1) 2y' + 6y(t) = 2u(t) \xrightarrow{\text{L}} L\{2y' + 6y(t) = 2u(t)\} \xrightarrow{\text{L}} 2sY(s) + 6Y(s) = 2U(s)$$

$$2) 2y'' + 8y' + 8y(t) = 10u(t) \xrightarrow{\text{L}} L\{2y'' + 8y' + 8y(t) = 10u(t)\}$$

$$\xrightarrow{\text{L}} 2s^2Y(s) + 8sY(s) + 8Y(s) = 10U(s)$$

$$3) 2y''' + 12y'' + 22y' + 12y(t) = 2u(t) \xrightarrow{\text{L}} L\{2y''' + 12y'' + 22y' + 12y(t) = 2u(t)\}$$

$$\xrightarrow{\text{L}} 2s^3Y(s) + 12s^2Y(s) + 22sY(s) + 12Y(s) = 2U(s)$$

$$4) 2y''' + 12y'' + 22y' + 12y(t) = 4u'(t) + 6u(t)$$

$$\xrightarrow{\text{L}} L\{2y''' + 12y'' + 22y' + 12y(t) = 4u'(t) + 6u(t)\}$$

$$\xrightarrow{\text{L}} 2s^3Y(s) + 12s^2Y(s) + 22sY(s) + 12Y(s) = 4sU(s) + 6U(s)$$

# Laplaceova transformace

Příklady:

Použij Laplaceovy věty

$$1) 2y' + 6y(t) = 2u(t) \xrightarrow{\text{L}} L\{2y' + 6y(t) = 2u(t)\} \xrightarrow{\text{L}} 2sY(s) + 6Y(s) = 2U(s)$$

$$\Rightarrow Y(s)(2s + 6) = 2U(s)$$

$$\Rightarrow 2Y(s)(s + 3) = 2U(s)$$

$$\Rightarrow Y(s)(s + 3) = U(s)$$

# Laplaceova transformace

Příklady:

Použij Laplaceovy věty

$$2) 2y'' + 8y' + 8y(t) = 10u(t) \xrightarrow{\text{L}} L\{2y'' + 8y' + 8y(t) = 10u(t)\}$$

$$\xrightarrow{\text{L}} 2s^2Y(s) + 8sY(s) + 8Y(s) = 10U(s)$$

$$\xrightarrow{\quad} 2Y(s)(s^2 + 4s + 4) = 10U(s)$$

$$\xrightarrow{\quad} 2Y(s)(s^2 + 4s + 4) = 10U(s)$$

$$\xrightarrow{\quad} 2Y(s)(s + 2)^2 = 10U(s)$$

$$\xrightarrow{\quad} Y(s)(s + 2)^2 = 5U(s)$$

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$s_1 = \frac{-4 + \sqrt{4^2 - 4 * 4}}{2} = -2$$

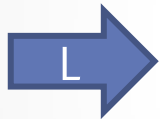
$$s_2 = \frac{-4 - \sqrt{4^2 - 4 * 4}}{2} = -2$$

# Laplaceova transformace

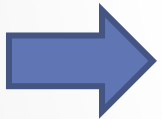
Příklady:

Použij Laplaceovy věty

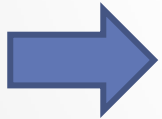
$$3) 2y''' + 12y'' + 22y' + 12y(t) = 2u(t) \xrightarrow{L} L\{2y''' + 12y'' + 22y' + 12y(t) = 2u(t)\}$$



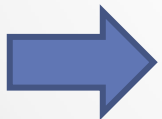
$$2s^3Y(s) + 12s^2Y(s) + 22sY(s) + 12Y(s) = 2U(s)$$



$$2Y(s)[s^3 + 6s^2 + 11s + 6] = 2U(s)$$



$$2Y(s)(s + 1)(s + 2)(s + 3) = 2U(s)$$



$$Y(s)(s + 1)(s + 2)(s + 3) = U(s)$$

# Laplaceova transformace

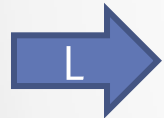
Příklady:

Použij Laplaceovy věty

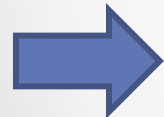
$$4) 2y''' + 12y'' + 22y' + 12y(t) = 4u'(t) + 6u(t)$$



$$L\{2y''' + 12y'' + 22y' + 12y(t) = 4u'(t) + 6u(t)\}$$



$$2s^3Y(s) + 12s^2Y(s) + 22sY(s) + 12Y(s) = 4sU(s) + 6U(s)$$



$$2Y(s)\{s^3 + 6s^2 + 11s + 6\} = 2U(s)(2s + 3)$$



$$2Y(s)(s + 1)(s + 2)(s + 3) = 2U(s)(2s + 3)$$



$$Y(s)(s + 1)(s + 2)(s + 3) = U(s)(2s + 3)$$

# Matematické popisy dynamických soustav

- ✓ LDR – lineární diferenciální rovnice
- **Přenos systému**
- Nuly a póly přenosu systému
- Přenos ve tvaru časových konstant
- Impulsní funkce a impulsní charakteristika
- Přechodová funkce a přechodová charakteristika
- Frekvenční přenos
- Frekvenční charakteristika v komplexní rovině
- Frekvenční charakteristiky v logaritmických souřadnicích

# Matematické popisy dynamických soustav

- LDR – lineárně diferenciální rovnice (už známe)

Obecný výraz LDR:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_1 y' + a_0 y(t) = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_0 u(t)$$

**Podmínka fyzikální realizovatelnosti:  $n \geq m$**

Ale my se potkáme maximálně s touto variantou:

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

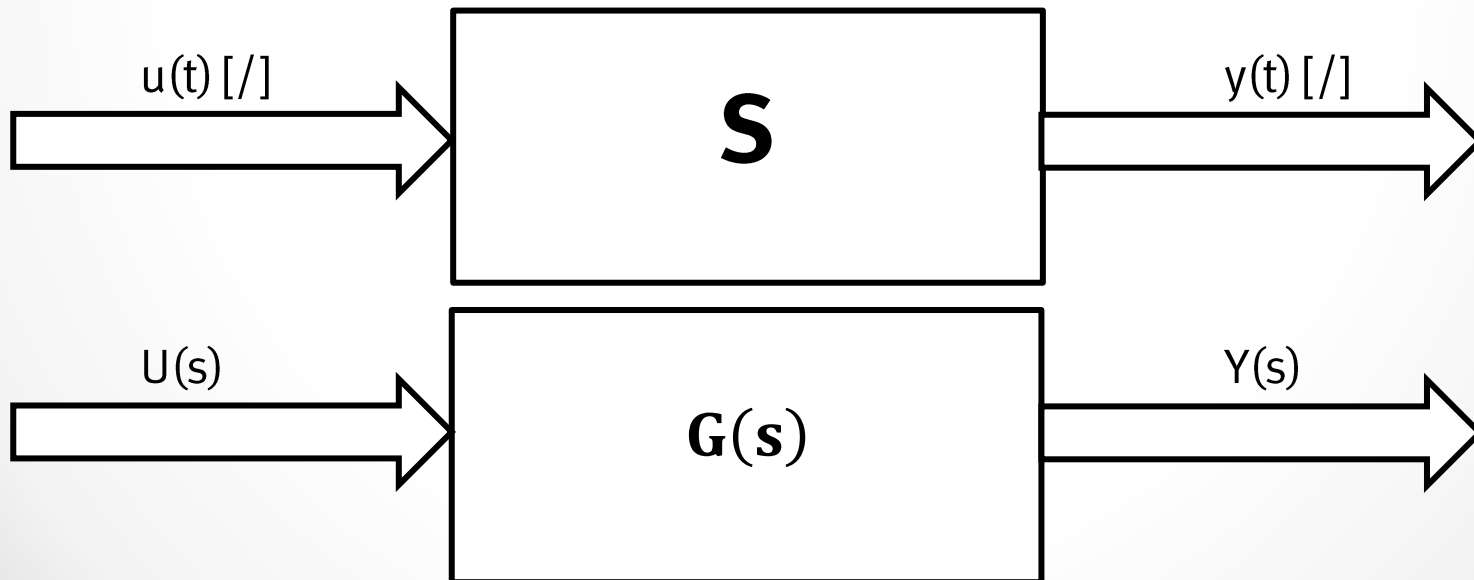
# Matematické popisy dynamických soustav

- **Přenos systému**

Jako poměr Laplaceova obrazu výstupní veličiny k Laplaceova obrazu vstupní veličiny při nulových počátečních podmínkách.

$$G(s) = \frac{L\{y(t)\}}{L\{u(t)\}} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Nulové počáteční podmínky

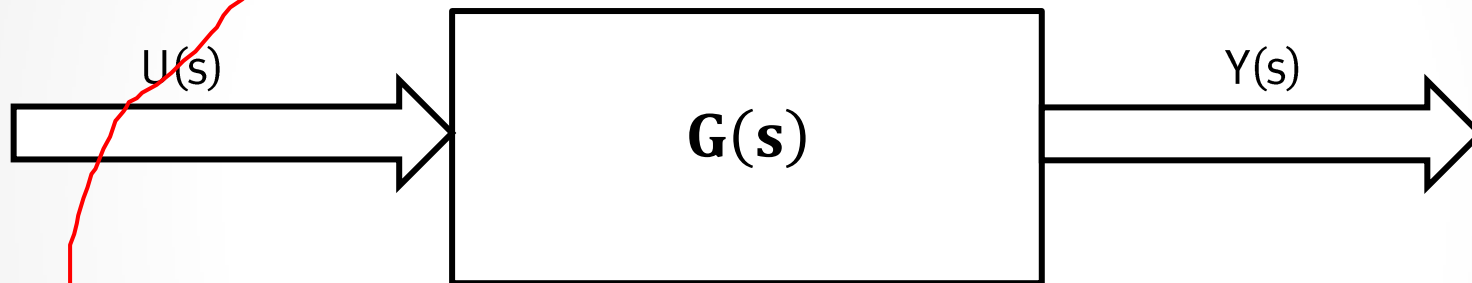


# Matematické popisy dynamických soustav

- Přenos systému

$$G(s) = \frac{L\{y(t)\}}{L\{u(t)\}} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Nulové počáteční podmínky



$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_1 y' + a_0 y(t) = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_0 u(t)$$

$$L\{a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_1 y' + a_0 y(t)\} = L\{b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_0 u(t)\}$$

$$a_n s^n Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_m s^m U(s) + \dots + b_0 U(s)$$

$$Y(s)[a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0] = U(s)[b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0]$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}$$

# Matematické popisy dynamických soustav

- Přenos systému – příklad č.1):

$$2y' + 6y(t) = 2u(t)$$

$$L\{2y' + 6y(t) = 2u(t)\}$$

$$2sY(s) + 6Y(s) = 2U(s)$$

$$Y(s)(2s + 6) = 2U(s)$$

$$2Y(s)(s + 3) = 2U(s)$$

$$Y(s)(s + 3) = U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s + 3}$$

# Matematické popisy dynamických soustav

- Přenos systému– příklad č.2):

$$2y'' + 8y' + 8y(t) = 10u(t)$$

$$L\{2y'' + 8y' + 8y(t) = 10u(t)\}$$

$$2s^2Y(s) + 8sY(s) + 8Y(s) = 10U(s)$$

$$2Y(s)(s^2 + 4s + 4) = 10U(s)$$

$$Y(s)(s^2 + 4s + 4) = 5U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{5}{s^2 + 4s + 4}$$

$$s_1 = \frac{-4 + \sqrt{4^2 - 4 * 4}}{2} = -2$$

$$s_2 = \frac{-4 - \sqrt{4^2 - 4 * 4}}{2} = -2$$

$$G(s) = \frac{5}{(s + 2)^2}$$

# Matematické popisy dynamických soustav

Přenos systému – příklad č.3):

$$2y''' + 12y'' + 22y' + 12y(t) = 2u(t)$$

$$L\{2y''' + 12y'' + 22y' + 12y(t) = 2u(t)\}$$

$$2s^3Y(s) + 12s^2Y(s) + 22sY(s) + 12Y(s) = 2U(s)$$

$$Y(s)[2s^3 + 12s^2 + 22s + 12] = 2U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{2s^3 + 12s^2 + 22s + 12}$$

$$G(s) = \frac{2}{2(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

# Matematické popisy dynamických soustav

Přenos systému– příklad č.4):

$$2y''' + 12y'' + 22y' + 12y(t) = 4u'(t) + 6u(t)$$

$$L\{2y''' + 12y'' + 22y' + 12y(t) = 4u'(t) + 6u(t)\}$$

$$2s^3Y(s) + 12s^2Y(s) + 22sY(s) + 12Y(s) = 4sU(s) + 6U(s)$$

$$Y(s)\{2s^3 + 12s^2 + 22s + 12\} = U(s)(4s + 6)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4s + 6}{2s^3 + 12s^2 + 22s + 12}$$

$$G(s) = \frac{2(2s + 3)}{2(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$

$$G(s) = \frac{2s + 3}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$

## Použitá literatura

- [1] Ivan Švarc, Branislav Lacko, Ing. Zdeněk Němec, AUTOMATIZACE vydavatelství PC-DIR s.r.o 1995 **str. 41-42**
- [2] Pavel Beneš, Branislav Lacko, Ladislav Maixner, Ladislav Šmejkal, Rudolf Voráček, Jindřich Král, Josef Janeček, Jaroslav Semerád, Pavel Souček, Bohumil Šulc, Künzel Gunnar Automatizace a automatizační technika **Automatické řízení 2** Computer Press Brno 2014 **str. 33 až 36**