

Úvod do automatizace 06

Rozklad přenosu systému v parciální zlomky

Matematické nástroje pro popisy dynamických soustav

- Rozklad přenosu $F(s) = \frac{M(s)}{N(s)}$ v parciální zlomky – různé kořeny jmenovatele
- Je-li dána funkce $F(s)$

$$F(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{M(s)}{k_0(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3) * \dots}$$

- Kde kořeny jmenovatele s_1, s_2, s_3, \dots jsou různé, můžeme ji rozložit v součet parciálních zlomků

$$F(s) = \frac{K_1}{s - s_1} + \frac{K_2}{s - s_2} + \frac{K_3}{s - s_3} + \dots$$

Konstanty K_1, K_2, K_3, \dots určíme následujícím způsobem.

Matematické nástroje pro popis dynamických soustav

$$F(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{M(s)}{k_0(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3) * \dots}$$

$$F(s) = \frac{K_1}{s-s_1} + \frac{K_2}{s-s_2} + \frac{K_3}{s-s_3} + \dots$$

Pro určení konstant použijeme obecný vzorec:

$$K_i = \left[(s - s_i) \frac{M(s)}{N(s)} \right]_{s=s_i}$$

Matematické nástroje pro popisy dynamických soustav

Prakticky si ukážeme na příkladu

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Kořeny jmenovatele:

$$s_1 = -1$$

$$s_2 = -2$$

$$s_3 = -3$$

Rozklad v parciální zlomky

$$G(s) = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+3}$$

Pro určení jednotlivých konstant **K** dosadíme do obecného vzorce:

$$K_i = \left[(s - s_i) \frac{M(s)}{N(s)} \right]_{s=s_i}$$

Matematické nástroje pro popisy dynamických soustav

$$\begin{aligned} K_1 &= \left[(s + 1) \frac{M(s)}{N(s)} \right]_{s=-1} = \left[\cancel{(s + 1)} \frac{1}{(s+1)\cancel{(s+2)}(s+3)} \right]_{s=-1} = \\ &= \left[\frac{1}{(s+2)(s+3)} \right]_{s=-1} = \left[\frac{1}{(-1+2)(-1+3)} \right] = \frac{1}{2} = \mathbf{0,5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_2 &= \left[(s + 2) \frac{M(s)}{N(s)} \right]_{s=-2} = \left[\cancel{(s + 2)} \frac{1}{(s+1)\cancel{(s+2)}(s+3)} \right]_{s=-2} = \\ &= \left[\frac{1}{(s+1)(s+3)} \right]_{s=-2} = \left[\frac{1}{(-2+1)(-2+3)} \right] = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_3 &= \left[(s + 3) \frac{M(s)}{N(s)} \right]_{s=-3} = \left[\cancel{(s + 3)} \frac{1}{(s+1)(s+2)\cancel{(s+3)}} \right]_{s=-3} = \\ &= \left[\frac{1}{(s+1)(s+2)} \right]_{s=-3} = \left[\frac{1}{(-3+1)(-3+2)} \right] = \frac{1}{2} = \mathbf{0,5} \end{aligned}$$

Matematické nástroje pro popis dynamických soustav

- Příklad rozklad přenosu $G(s) = \frac{M(s)}{N(s)}$ v parciální zlomky

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$K_1 = 0,5;$$

$$K_2 = -1;$$

$$K_3 = 0,5$$

$$G(s) = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+3} = \frac{0,5}{s+1} + \frac{-1}{s+2} + \frac{0,5}{s+3}$$

Matematické nástroje pro popisy dynamických soustav

- Rozklad přenosu $F(s) = \frac{M(s)}{N(s)}$ v parciální zlomky – násobné kořeny jmenovatele
- Je-li dána funkce $F(s)$

$$F(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{M(s)}{k_0(s - s_1)^n(s - s_2)(s - s_3) * \dots}$$

- Kde s_1 je n -násobný kořen,
 $s_2, s_3 \dots$ kořeny různé jednonásobné, potom je rozklad :

$$F(s) = \frac{C_1}{s - s_1} + \frac{C_2}{(s - s_1)^2} + \dots + \frac{C_n}{(s - s_1)^n} + \frac{K_2}{s - s_2} + \frac{K_3}{s - s_3} + \dots$$

Konstanty $C_1, C_2, C_n, K_2, K_3, \dots$ určíme následujícím způsobem.

Matematické nástroje pro popisy dynamických soustav

Konstanty $C_1, C_2, C_n, K_2, K_3, \dots$ určíme následujícím způsobem.

$$F(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{M(s)}{k_0(s - s_1)^n(s - s_2)(s - s_3) * \dots}$$

$$F(s) = \frac{C_1}{s - s_1} + \frac{C_2}{(s - s_1)^2} + \dots + \frac{C_2}{(s - s_1)^n} + \frac{K_2}{s - s_2} + \frac{K_3}{s - s_3} + \dots$$

$$K_i = \left[(s - s_i) \frac{M(s)}{N(s)} \right]_{s=s_i}$$

Vzorec pro kořeny různé jednonásobné

Matematické nástroje pro popisy dynamických soustav

Konstanty $C_1, C_2, C_n, K_2, K_3, \dots$ určíme následujícím způsobem.

$$F(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{M(s)}{k_0(s-s_1)^n(s-s_2)(s-s_3) * \dots}$$

$$F(s) = \frac{C_1}{s-s_1} + \frac{C_2}{(s-s_1)^2} + \dots + \frac{C_n}{(s-s_1)^n} + \frac{K_2}{s-s_2} + \frac{K_3}{s-s_3} + \dots$$

$$C_n = \left[(s-s_i)^n \frac{M(s)}{N(s)} \right]_{s=s_1} \quad \text{Vzorec pro koeficient } C_n \text{ násobného kořenu}$$

$$C_{n-1} = \frac{1}{1!} \left\{ \frac{d}{ds} \left[(s-s_i)^n \frac{M(s)}{N(s)} \right] \right\}_{s=s_1} \quad \text{Vzorec pro koeficient } C_{n-1} \text{ násobného kořenu}$$

Matematické nástroje pro popisy dynamických soustav

Konstanty $C_1, C_2, C_n, K_2, K_3, \dots$ určíme následujícím způsobem.

$$F(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{M(s)}{k_0(s-s_1)^n(s-s_2)(s-s_3) \cdots}$$

$$F(s) = \frac{C_1}{s-s_1} + \frac{C_2}{(s-s_1)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(s-s_1)^n} + \frac{K_2}{s-s_2} + \frac{K_3}{s-s_3} + \cdots$$

Vzorec pro koeficient C_{n-2} násobného kořenu

$$C_{n-2} = \frac{1}{2!} \left\{ \frac{d^2}{ds^2} \left[(s-s_i)^n \frac{M(s)}{N(s)} \right] \right\}_{s=s_1}$$

Matematické nástroje pro popisy dynamických soustav

Příklad: $F(s) = \frac{s^2 + s + 3}{(s + 2)^2(s + 1)}$

Rozklad v parciální zlomky

$$F(s) = \frac{s^2 + s + 3}{(s + 2)^2(s + 1)} = \frac{C_1}{s + 2} + \frac{C_2}{(s + 2)^2} + \frac{K}{s + 1}$$

Pomocný vzorec pro první derivaci zlomku

$$K = \left[\frac{s^2 + s + 3}{(s + 2)^2} \right]_{s=-1} = 3 \quad C_2 = \left[\frac{s^2 + s + 3}{s + 1} \right]_{s=-2} = -5 \quad \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{s^2 + s + 3}{s + 1} \right) = \frac{(2s + 1)(s + 1) - (s^2 + s + 3)}{(s + 1)^2}$$

$$C_1 = \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{s^2 + s + 3}{s + 1} \right) \right]_{s=-2} = \left[\frac{(2s + 1)(s + 1) - (s^2 + s + 3)}{(s + 1)^2} \right]_{s=-2} = -2$$

Matematické nástroje pro popis dynamických soustav

Příklad:
$$F(s) = \frac{s^2 + s + 3}{(s + 2)^2(s + 1)}$$

$$C_1 = -2; \quad C_2 = -5; \quad K = 3$$

$$F(s) = \frac{s^2 + s + 3}{(s+2)^2(s+1)} = \frac{C_1}{s+2} + \frac{C_2}{(s+2)^2} + \frac{K}{s+1} = \frac{-2}{s+2} + \frac{-5}{(s+2)^2} + \frac{3}{s+1}$$

Cvičení na opakování

- a) Vypočítej póly a nuly přenosu systému*
- b) Vypočítej časové konstanty přenosu systému*
- c) Proveďte rozklad v parciální zlomky*

1) $y' + 0,6y(t) = 0,2u(t)$

2) $4y'' + 16y' + 16y(t) = 20u(t)$

3) $4y'' + 12y' + 8y(t) = 10u(t)$

4) $3y'' + 12y' + 9y(t) = u(t)$

5) $10y'' + 3y' + 0,2y(t) = 10u(t)$

6) $2y'' + 0,6y' + 0,04y(t) = 10u(t)$

Použitá literatura

[1] Ivan Švarc, Branislav Lacko, Ing. Zdeněk Němec, AUTOMATIZACE vydavatelství PC-DIR s.r.o 1995 **str. 42**