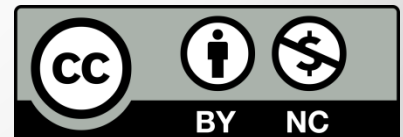


Úvod do automatizace 06

Impulsní funkce a impulsní charakteristika



Matematické popisy dynamických soustav

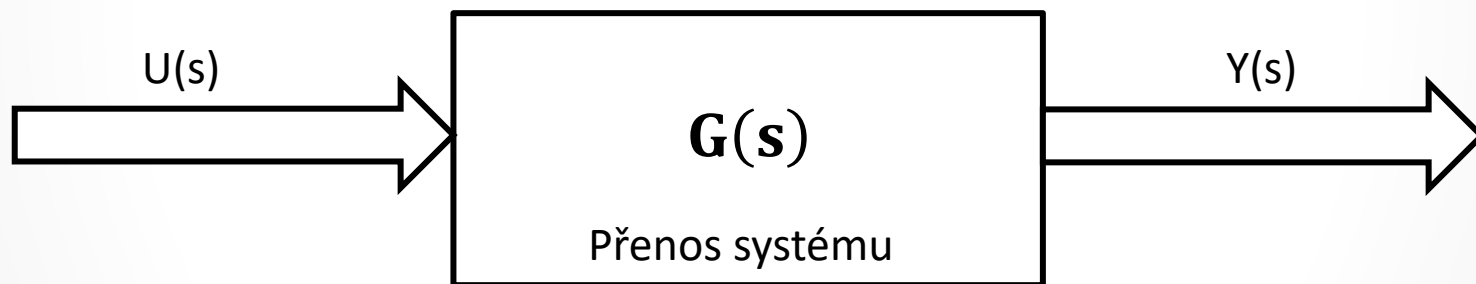
- ✓ LDR – lineární diferenciální rovnice
- ✓ Přenos systému
- ✓ Nuly a póly přenosu systému
- ✓ Přenos systému ve tvaru časových konstant
- **Impulsní funkce a impulsní charakteristika**
- Přechodová funkce a přechodová charakteristika
- Frekvenční přenos
- Frekvenční charakteristika v komplexní rovině
- Frekvenční charakteristiky v logaritmických souřadnicích

Matematické popisy dynamických soustav

- Impulsní funkce a impulsní charakteristika

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \text{ přenos systému}$$

Nulové počáteční podmínky

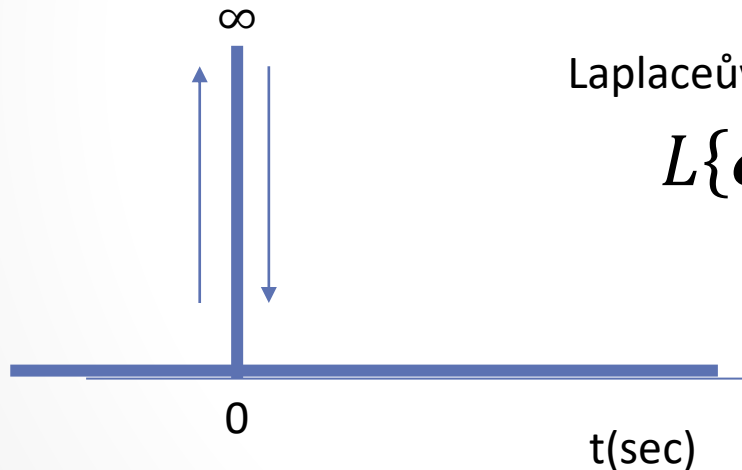


Laplaceův obraz vstupní funkce $u(t)$

Laplaceův obraz výstupní funkce $y(t)$

Matematické popisy dynamických soustav

- Diracův impuls $\delta(t)$

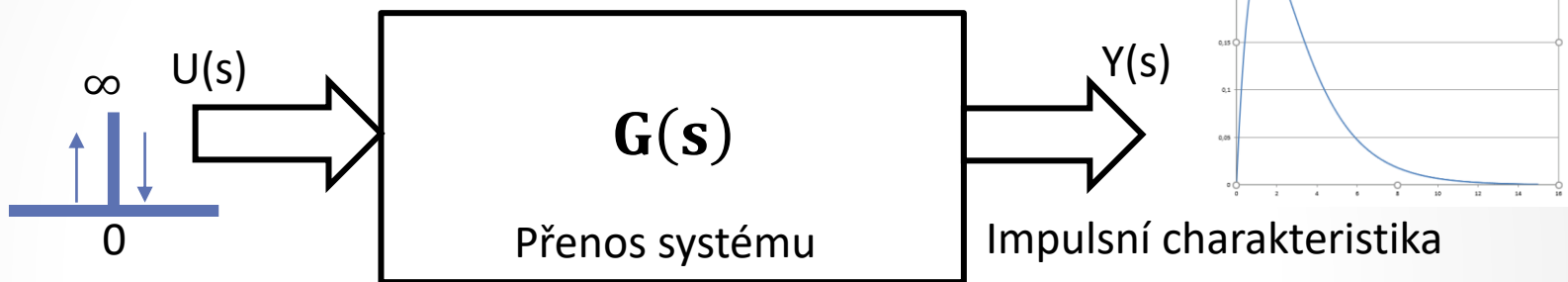


Laplaceův obraz funkce $\delta(t)$ [*delta t*]

$$L\{\delta(t)\} = 1$$

Matematické popisy dynamických soustav

- Impulsní funkce a impulsní charakteristika



Laplaceův obraz vstupní funkce $u(t)$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \text{ přenos systému}$$

Nulové počáteční podmínky

Laplaceův obraz výstupní funkce $y(t)$

$$Y(s) = G(s) * U(s)$$

Za $U(s)$ dosadíme Laplaceův obraz Dirakova impulsu

deLaplaceování

$$Y(s) = G(s) * 1$$

$$g(t) = L^{-1}\{G(s) * 1\}$$

Získáme impulsní funkci $g(t)$. Když navíc poté do výsledné funkce dosadíme konkrétní čas a zakreslíme do časových souřadnic, získáme (graf) impulsní charakteristiku.

Impulsní funkce a impulsní charakteristika

- Vytiskněte si Laplaceův slovník, pro další práci ho budete potřebovat. Najdete ho na stránkách laboratoře v menu AUT 4.ročník

The screenshot shows a web browser window with the title "Operátorový slovník Laplaceovj transformácie". The browser's address bar shows the URL "ucebnaaut.wz.cz/wp-content/uploads/2017/09/Slovník.pdf". The page content is a table with two columns: $f(t)$ and $F(s)$. The table lists various functions and their Laplace transforms. The first row is $1(t)$ with transform 1 . The second row is $f(t) = 1$ pre $t \geq 0$ inak $f(t) = 0$ with transform $\frac{1}{s}$. The third row is a with transform $\frac{a}{s}$. The fourth row is t with transform $\frac{1}{s^2}$. The fifth row is t^n with transform $\frac{n!}{s^{n+1}}$. The sixth row is e^{-at} with transform $\frac{1}{(s+a)}$. The seventh row is $\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$ with transform $\frac{1}{s(s+a)}$. The eighth row is $\sin bt$ with transform $\frac{b}{s^2 + b^2}$.

$f(t)$	$F(s)$
$1(t)$	1
$f(t) = 1$ pre $t \geq 0$ inak $f(t) = 0$	$\frac{1}{s}$
a	$\frac{a}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{(s+a)}$
$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$

Impulsní funkce a impulsní charakteristika

- *Příklad č.1 na impulsní funkci a impulsní charakteristiku soustavy 1. řádu*

- $4y' + y(t) = u(t)$

1) Nalezení Laplaceova obrazu LDR

- $L\{4y' + y(t) = u(t)\}$

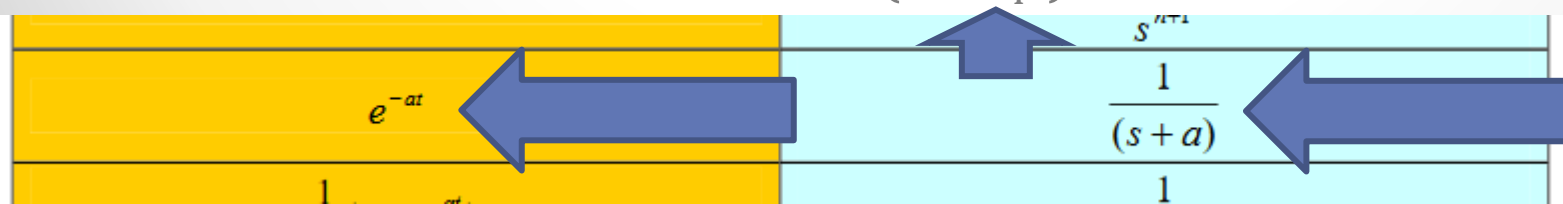
- $4sY(s) + Y(s) = U(s)$

2) Vytvoření „Přenosu“

- $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{4s+1}$

3) Nalezení řešení impulsní funkce $g(t)$ pomocí Laplaceova slovníku

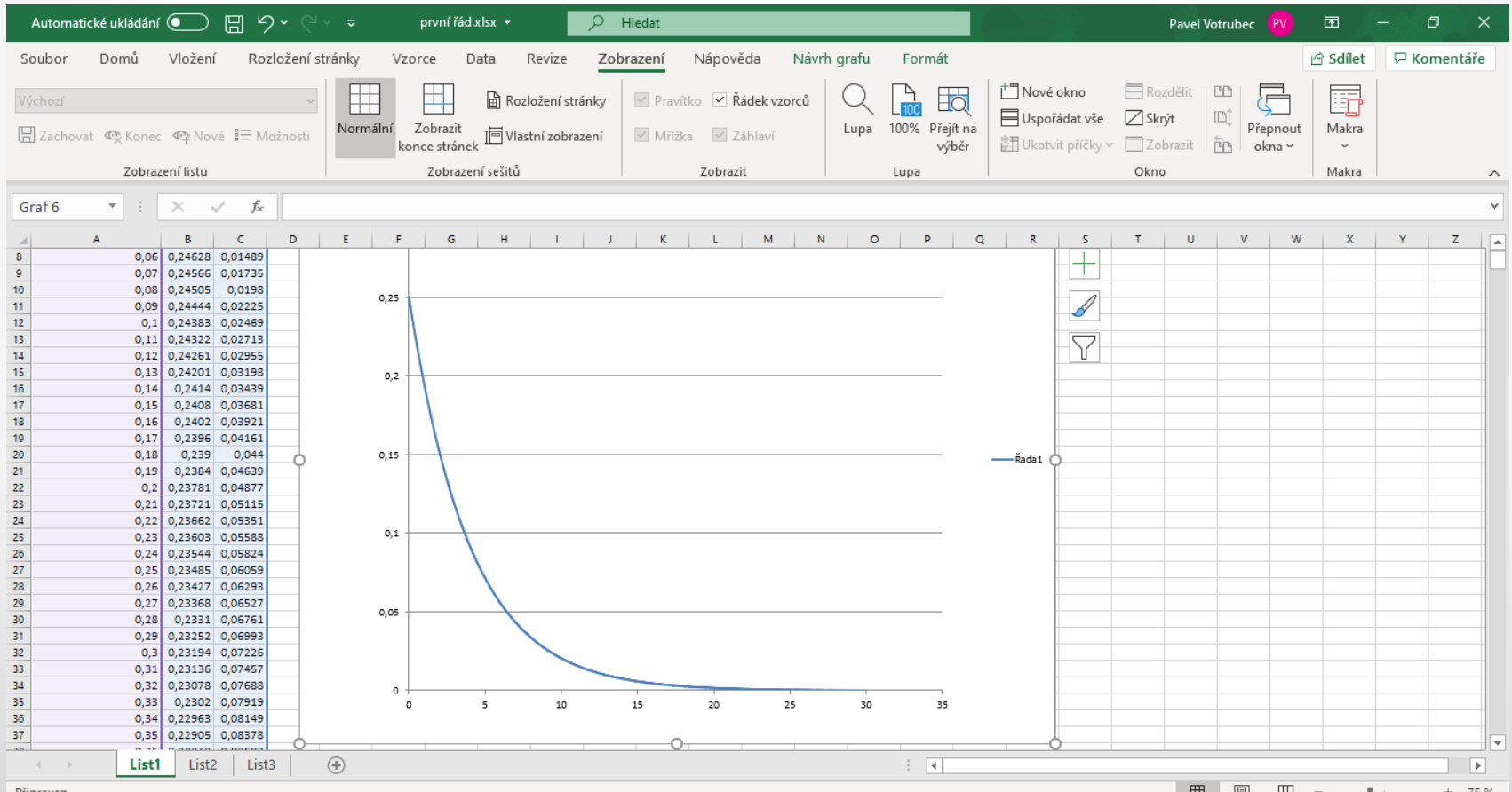
- $g(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{4s+1} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{4(s+\frac{1}{4})} \right\} = \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}t} = 0,25e^{-0,25t}$



Impulsní funkce a impulsní charakteristika

- Po naprogramování do Exelu získáte (graf) impulsní charakteristiku $g(t)$. Čas t se zadává od 0 do „nekonečna“ (podle potřeby).

4) $g(t) = 0,25e^{-0,25t}$



Impulsní funkce a impulsní charakteristika

- *Příklad č.2 na impulsní funkci a impulsní charakteristiku soustavy 2. řádu s různými kořeny*
- $2y'' + 3y' + y(t) = u(t)$

1) Nalezení Laplaceova obrazu LDR

$$L\{2y'' + 3y' + y(t) = u(t)\}$$

$$2s^2Y(s) + 3sY(s) + Y(s) = U(s)$$

2) Vytvoření „Přenosu“

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{2s^2 + 3s + 1} = \frac{1}{2(s - s_1)(s - s_2)}$$

Impulsní funkce a impulsní charakteristika

- 3) Nalezení kořenů jmenovatele pomocí diskriminantu kvadratické rovnice

$$s_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 * 2 * 1}}{2 * 2}$$

$$s_1 = -\frac{1}{2} = -0,5$$

$$s_2 = -1$$

- 4) Výsledný přenos se známými kořeny jmenovatele

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{2s^2 + 3s + 1} = \frac{1}{2(s + 0,5)(s + 1)}$$

- 5) K nalezení řešení impulsní funkce $g(t)$ pomocí Laplaceova slovníku potřebujeme rozklad přenosu na parciální zlomky

$$g(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{2(s + 0,5)(s + 1)} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{K_1}{(s + 0,5)} + \frac{K_2}{(s + 1)} \right\}$$

Impulsní funkce a impulsní charakteristika

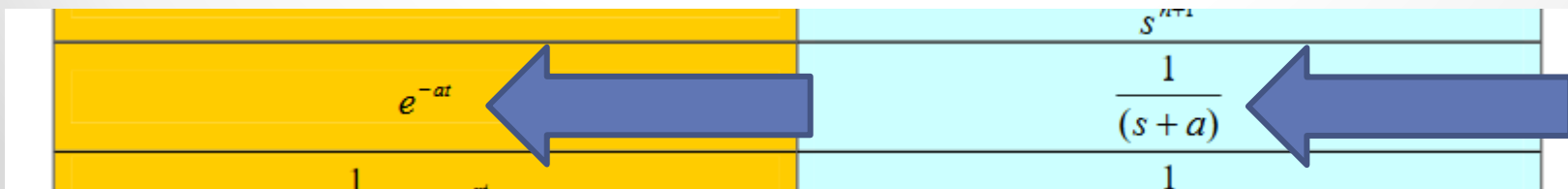
6) Nalezení čitatele parciálních zlomků

$$K_1 = \left\{ (s + 0,5) * \frac{1}{2(s + 0,5)(s + 1)} \right\}_{s=-0,5} = \left\{ \frac{1}{2(s + 1)} \right\}_{s=-0,5} = 1$$

$$K_2 = \left\{ (s + 1) * \frac{1}{2(s + 0,5)(s + 1)} \right\}_{s=-1} = \left\{ \frac{1}{2(s + 0,5)} \right\}_{s=-1} = -1$$

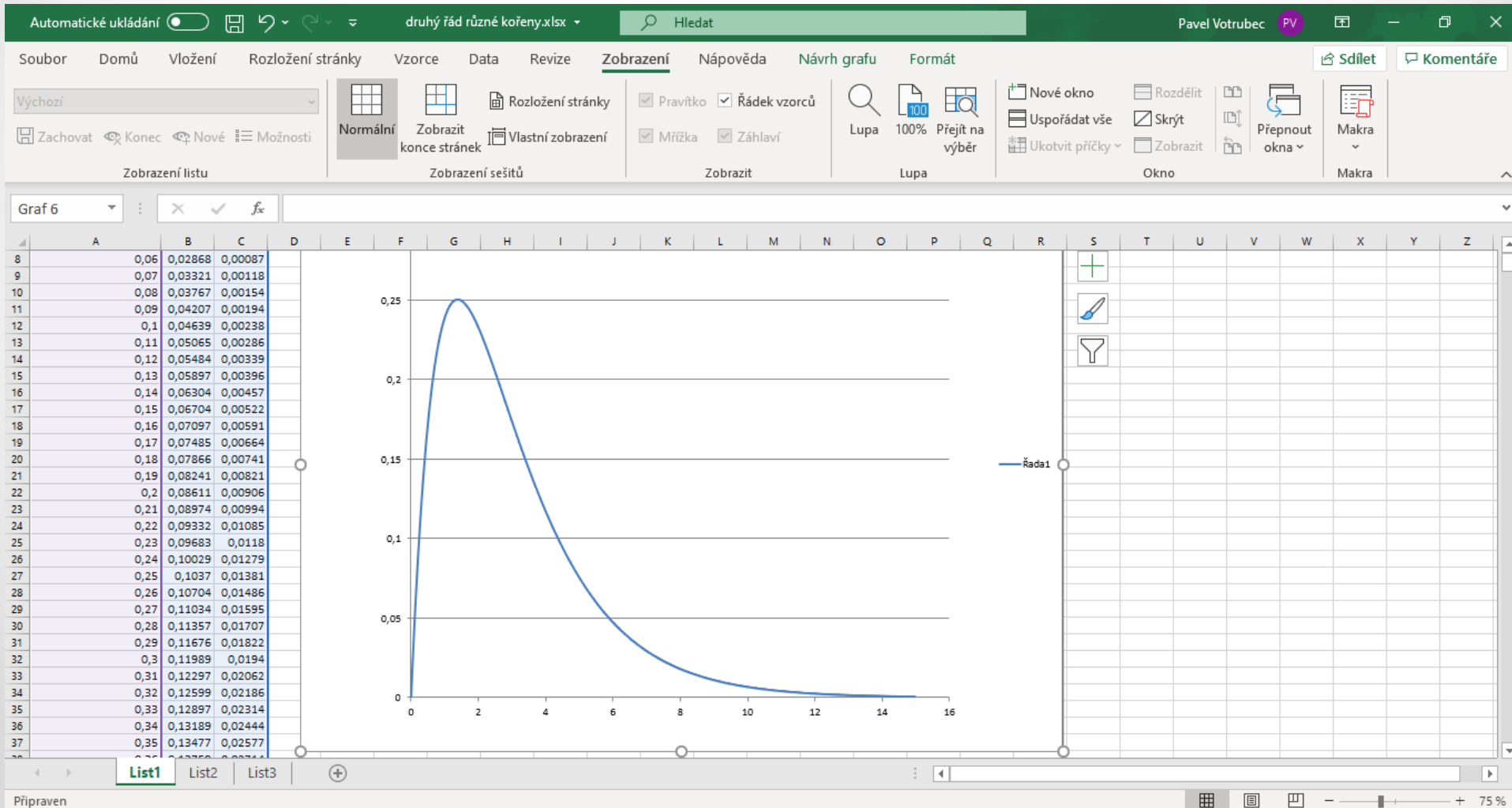
7) Nalezení řešení impulsní funkce $g(t)$ pomocí Laplaceova slovníku

$$\begin{aligned} g(t) &= L^{-1} \left\{ \frac{1}{2(s + 0,5)(s + 1)} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{K_1}{(s + 0,5)} + \frac{K_2}{(s + 1)} \right\} = \\ &= L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+0,5)} - \frac{1}{(s+1)} \right\} = e^{-0,5t} - e^{-t} \end{aligned}$$



Impulsní funkce a impulsní charakteristika

8. $g(t) = e^{-0,5t} - e^{-t}$ realizace impulsní charakteristiky



Impulsní funkce a impulsní charakteristika

- *Příklad č.3 na impulsní funkci a impulsní charakteristiku soustavy 2. řádu s násobnými kořeny*

- $4y'' + 4y' + y(t) = u(t)$

1) Nalezení Laplaceova obrazu LDR

- $L\{4y'' + 4y' + y(t) = u(t)\}$

- $4s^2Y(s) + 4sY(s) + Y(s) = U(s)$

2) Vytvoření „Přenosu“

- $$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{4s^2 + 4s + 1} = \frac{1}{4(s-s_1)(s-s_2)}$$

3) Nalezení kořenů jmenovatele pomocí diskriminantu kvadratické rovnice

- $$s_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4}$$

- $$s_{1,2} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} = -0,5$$

Impulsní funkce a impulsní charakteristika

4) Výsledný přenos se známými kořeny jmenovatele

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{4s^2 + 4s + 1} = \frac{1}{4(s + 0,5)^2}$$

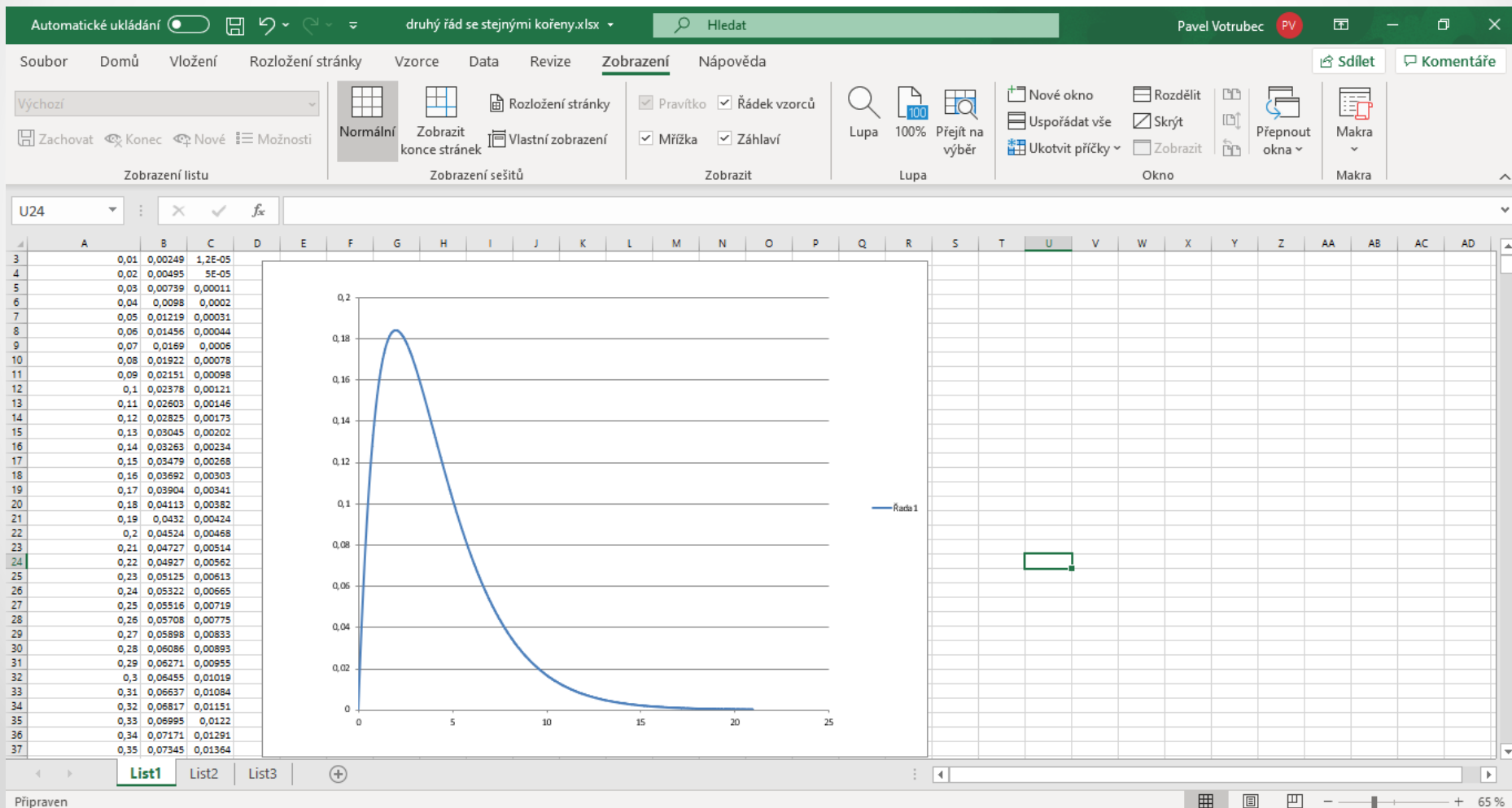
5) Nalezení řešení impulsní funkce $g(t)$ pomocí Laplaceova slovníku

$$g(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{4(s + 0,5)^2} \right\} = \frac{1}{4} t e^{-0,5t} = 0,25 * t e^{-0,5t}$$



Impulsní funkce a impulsní charakteristika

$$6) g(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{4(s+0,5)^2} \right\} = \frac{1}{4} t e^{-0,5t} = 0,25 * t e^{-0,5t}$$



Cvičení na opakování

Vypočítejte impulsní funkce a impulsní charakteristiky

1) $y' + 0,6y(t) = 0,2u(t)$

2) $4y'' + 16y' + 16y(t) = 20u(t)$

3) $4y'' + 12y' + 8y(t) = 10u(t)$

4) $3y'' + 12y' + 9y(t) = u(t)$

5) $10y'' + 3y' + 0,2y(t) = 10u(t)$

6) $2y'' + 0,6y' + 0,04y(t) = 10u(t)$

Použitá literatura

[1] Ivan Švarc, Branislav Lacko, Ing. Zdeněk Němec, AUTOMATIZACE vydavatelství PC-DIR s.r.o 1995 **str. 45**