

Úvod do automatizace 08

Přechodová funkce a přechodová charakteristika

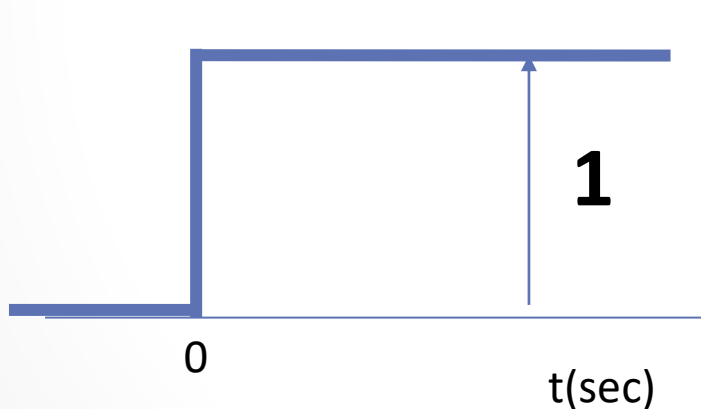
Matematické popisy dynamických soustav

- ✓ LDR – lineární diferenciální rovnice
- ✓ Přenos systému
- ✓ Nuly a póly přenosu systému
- ✓ Přenos systému ve tvaru časových konstant
- ✓ Rozklad přenosu v parciální zlomky
- ✓ Impulsní funkce a impulsní charakteristika
- **Přechodová funkce a přechodová charakteristika**
- Frekvenční přenos
- Frekvenční charakteristika v komplexní rovině
- Frekvenční charakteristiky v logaritmických souřadnicích

Matematické popisy dynamických soustav

- Jednotkový skok $\eta(t)$ [éta]

Laplaceův obraz jednotkového skoku, funkce $\eta(t)$ [éta t]

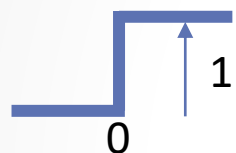


$$L\{\eta(t)\} = \frac{1}{s}$$

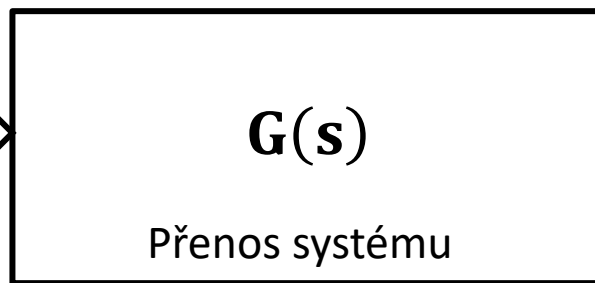
Matematické popisy dynamických soustav

- Přechodová funkce a přechodová charakteristika

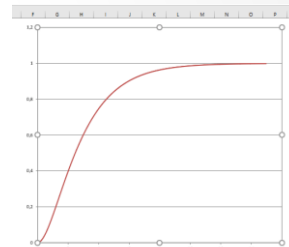
Jednotkový skok



$U(s)$



$Y(s)$



Přechodová charakteristika

Laplaceův obraz vstupní funkce $u(t)$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \text{ přenos systému}$$

Nulové počáteční podmínky

Laplaceův obraz výstupní funkce $y(t)$

$$Y(s) = G(s) * U(s)$$

Za $U(s)$ dosadíme Laplaceův obraz jednotkového skoku

deLaplaceování

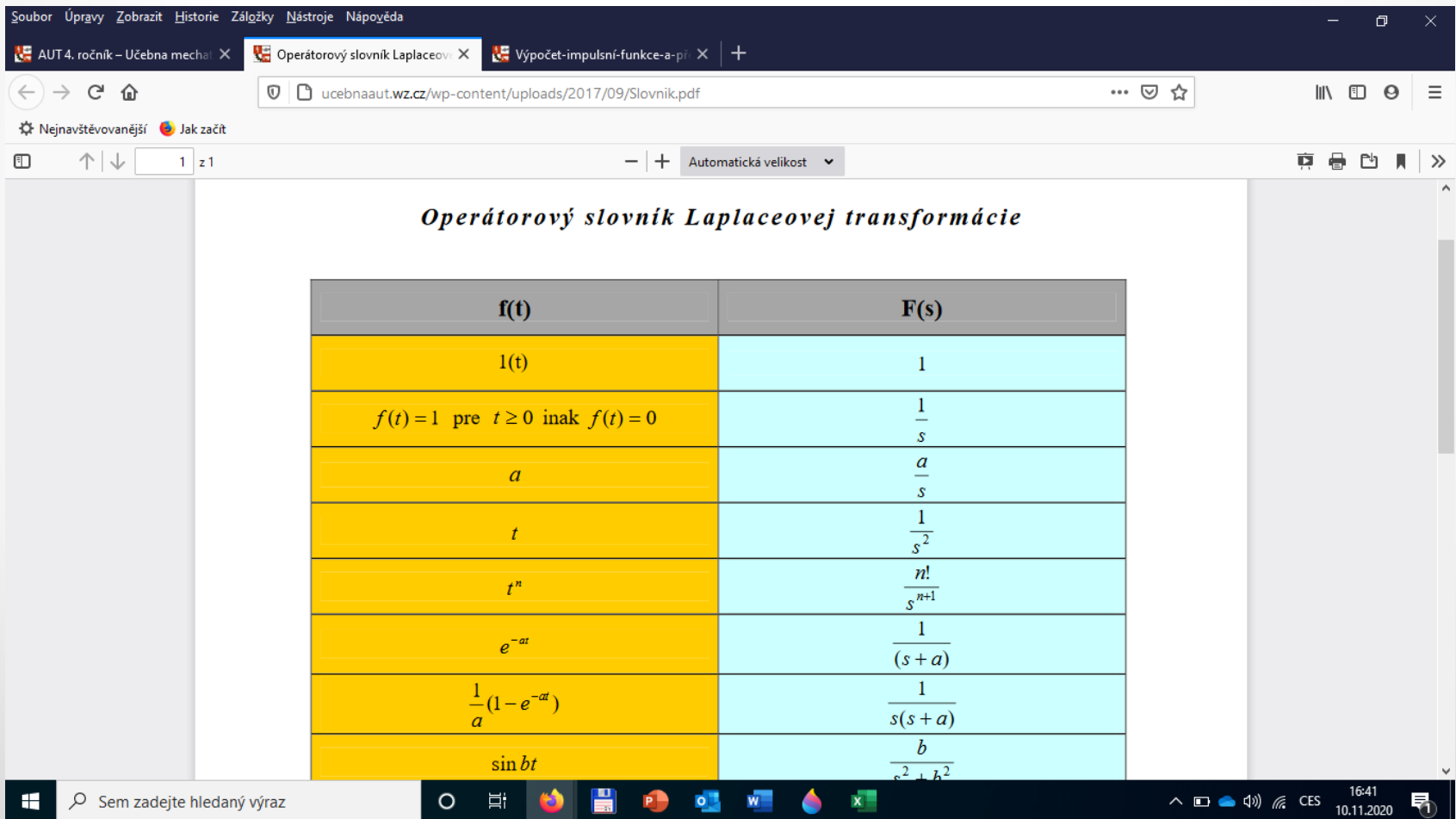
$$H(s) = G(s) * \frac{1}{s}$$

$$h(t) = L^{-1} \left\{ G(s) \frac{1}{s} \right\}$$

Získáme přechodovou funkci $h(t)$. Když navíc poté do výsledné funkce dosadíme konkrétní čas a zakreslíme do časových souřadnic, získáme (graf) přechodovou charakteristiku.

Přechodová funkce a přechodová charakteristika

- Laplaceův slovník, pro další práci ho zase budeme potřebovat. Najdete ho na stránkách laboratoře v menu AUT 4.ročník



Operátorový slovník Laplaceovej transformácie

| $f(t)$ | $F(s)$ |
|---|-----------------------|
| $1(t)$ | 1 |
| $f(t) = 1$ pre $t \geq 0$ inak $f(t) = 0$ | $\frac{1}{s}$ |
| a | $\frac{a}{s}$ |
| t | $\frac{1}{s^2}$ |
| t^n | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| e^{-at} | $\frac{1}{(s+a)}$ |
| $\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$ | $\frac{1}{s(s+a)}$ |
| $\sin bt$ | $\frac{b}{s^2 + b^2}$ |

Přechodová funkce a přechodová charakteristika

• *Příklad č.1 na přechodovou funkci a přechodovou charakteristiku soustavy 1. řádu*

• $4y' + y(t) = u(t)$

1) Nalezení Laplaceova obrazu LDR

• $L\{4y' + y(t) = u(t)\}$

• $4sY(s) + Y(s) = U(s)$

2) Vytvoření „Přenosu“

• $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{4s+1}$

3) Nalezení řešení přechodové funkce $h(t)$ pomocí Laplaceova slovníku

• $h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{(4s+1)} * \frac{1}{s} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{4(s+\frac{1}{4})} * \frac{1}{s} \right\} = \frac{1}{4} * \frac{1}{\frac{1}{4}} * (1 - e^{\frac{-1}{4}t}) =$

• $= 1 - e^{-0,25t}$

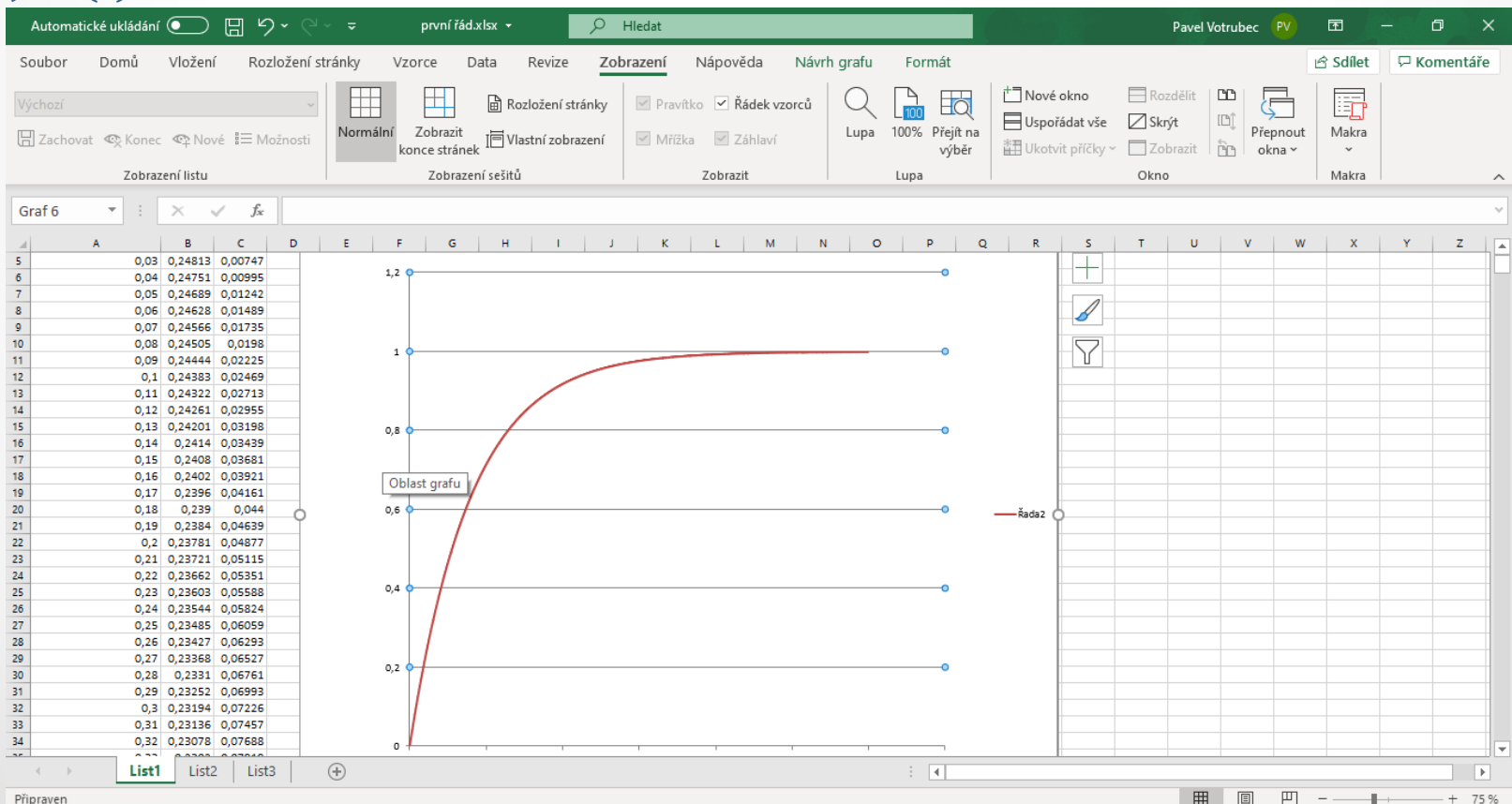


•

Přechodová funkce a přechodová charakteristika

- Po naprogramování do Exelu získáte (graf) přechodovou charakteristiku $h(t)$. Čas t se zadává od 0 do „nekonečna“ (podle potřeby).

4) $h(t) = 1 - e^{-0,25t}$



Přechodová funkce a přechodová charakteristika

- *Příklad č.2 na přechodovou funkci a přechodovou charakteristiku soustavy 2. řádu s různými kořeny*
- $2y'' + 3y' + y(t) = u(t)$

1) Nalezení Laplaceova obrazu LDR

$$L\{2y'' + 3y' + y(t) = u(t)\}$$

$$2s^2Y(s) + 3sY(s) + Y(s) = U(s)$$

2) Vytvoření „Přenosu“

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{2s^2 + 3s + 1} = \frac{1}{2(s - s_1)(s - s_2)}$$

Přechodová funkce a přechodová charakteristika

- 3) Nalezení kořenů jmenovatele pomocí diskriminantu
kvadratické rovnice

$$s_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 * 2 * 1}}{2 * 2}$$

$$s_1 = -\frac{1}{2} = -0,5$$

$$s_2 = -1$$

- 4) Výsledný přenos se známými kořeny jmenovatele

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{2s^2 + 3s + 1} = \frac{1}{2(s + 0,5)(s + 1)}$$

- 5) K nalezení řešení přechodové funkce $h(t)$ pomocí Laplaceova slovníku
potřebujeme rozklad přenosu v parciální zlomky

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{2(s + 0,5)(s + 1)} * \frac{1}{s} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{K_1}{(s + 0,5)} + \frac{K_2}{(s + 1)} + \frac{K_3}{(s + 0)} \right\}$$

Přechodová funkce a přechodová charakteristika

5) Nalezení čitatele parciálních zlomků

$$K_1 = \left\{ (s + 0,5) * \frac{1}{2(s + 0,5)(s + 1)} * \frac{1}{(s + 0)} \right\}_{s=-0,5} = \left\{ \frac{1}{2(s + 1)} * \frac{1}{s} \right\}_{s=-0,5} = -2$$

$$K_2 = \left\{ (s + 1) * \frac{1}{2(s + 0,5)(s + 1)} * \frac{1}{(s + 0)} \right\}_{s=-1} = \left\{ \frac{1}{2(s + 0,5)} * \frac{1}{s} \right\}_{s=-1} = 1$$

$$K_3 = \left\{ (s + 0) * \frac{1}{2(s + 0,5)(s + 1)} * \frac{1}{(s + 0)} \right\}_{s=0} = \left\{ \frac{1}{2(s + 0,5)(s + 1)} \right\}_{s=0} = 1$$

Přechodová funkce a přechodová charakteristika

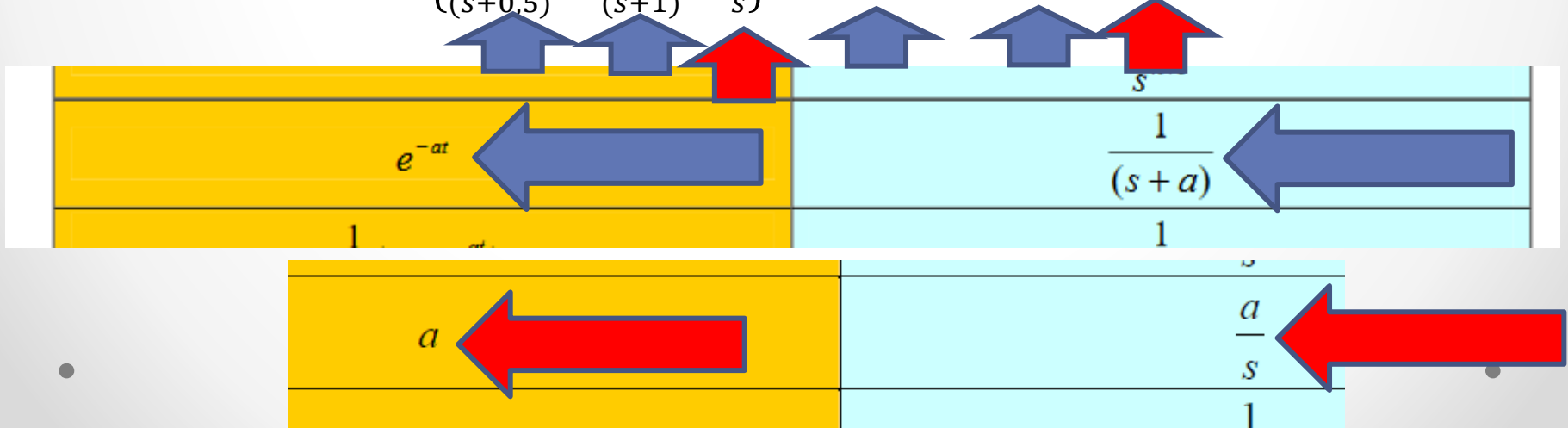
$$K_1 = -2$$

$$K_2 = 1$$

$$K_3 = 1$$

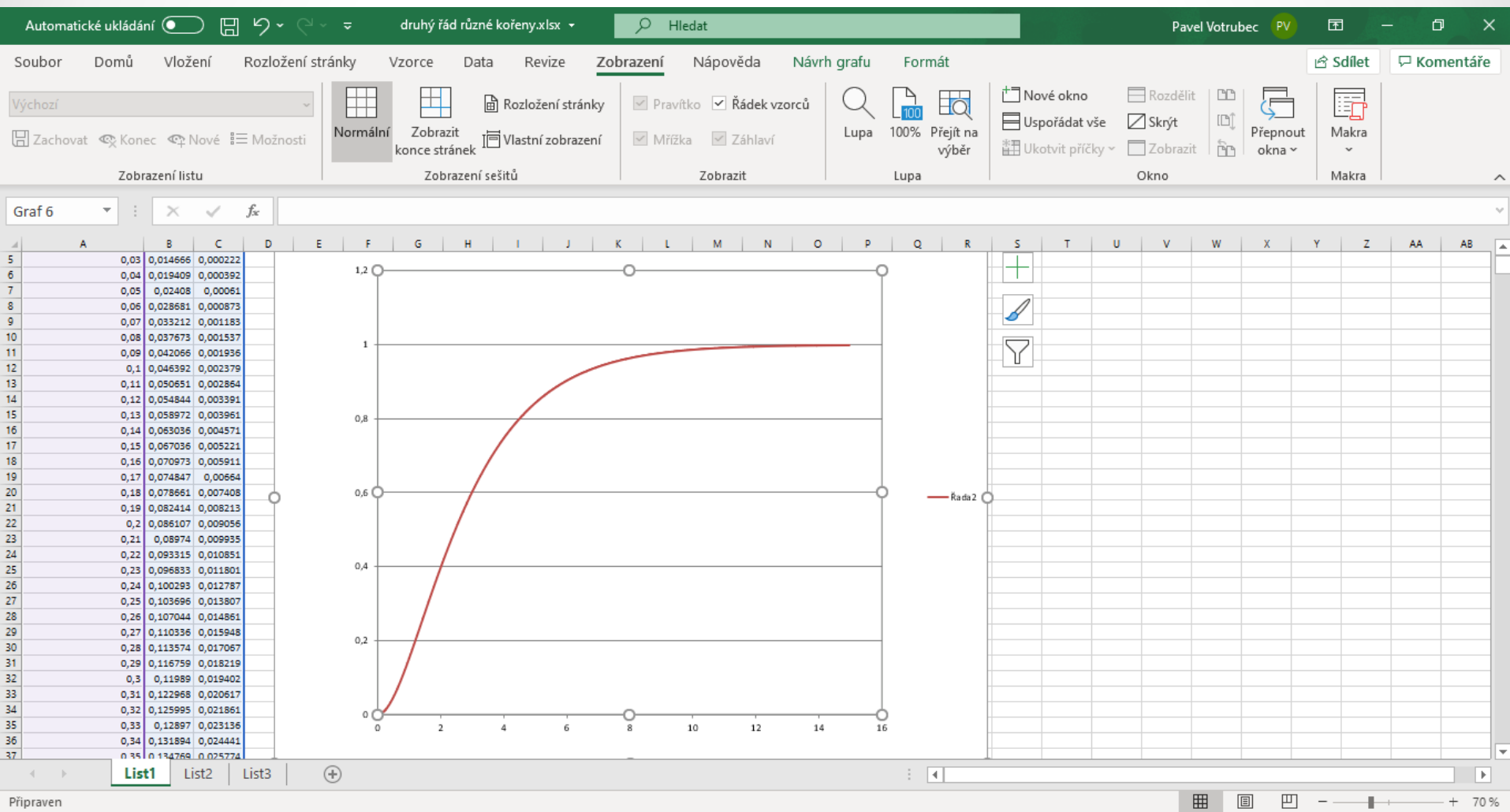
6) Nalezení řešení přenosové funkce $h(t)$ pomocí Laplaceova slovníku

$$\begin{aligned} h(t) &= L^{-1} \left\{ \frac{1}{2(s + 0,5)(s + 1)} * \frac{1}{(s + 0)} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{K_1}{(s + 0,5)} + \frac{K_2}{(s + 1)} + \frac{K_3}{(s + 0)} \right\} = \\ &= L^{-1} \left\{ \frac{-2}{(s+0,5)} + \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{s} \right\} = -2e^{-0,5t} + e^{-t} + 1 \end{aligned}$$



Přechodová funkce a přechodová charakteristika

7. $h(t) = -2e^{-0,5t} + e^{-t} + 1$ realizace přechodové charakteristiky



Přechodová funkce a přechodová charakteristika

- *Příklad č.3 na přechodovou funkci a přechodovou charakteristiku soustavy 2. řádu s násobnými kořeny*

- $4y'' + 4y' + y(t) = u(t)$

1) Nalezení Laplaceova obrazu LDR

- $L\{4y'' + 4y' + y(t) = u(t)\}$

- $4s^2Y(s) + 4sY(s) + Y(s) = U(s)$

2) Vytvoření „Přenosu“

- $$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{4s^2 + 4s + 1} = \frac{1}{4(s-s_1)(s-s_2)}$$

3) Nalezení kořenů jmenovatele pomocí diskriminantu kvadratické rovnice

- $$s_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4}$$

- $$s_{1,2} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} = -0,5$$

Přechodová funkce a přechodová charakteristika

4) Výsledný přenos se známými kořeny jmenovatele

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{4s^2 + 4s + 1} = \frac{1}{4(s + 0,5)^2}$$

5) K nalezení řešení přechodové funkce $h(t)$ pomocí Laplaceova slovníku potřebujeme rozklad přenosu v parciální zlomky

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + 0)} * \frac{1}{4(s + 0,5)^2} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{K_1}{(s + 0)} + \frac{C_1}{(s + 0,5)} + \frac{C_2}{(s + 0,5)^2} \right\}$$

$$K_1 = \left\{ (s + 0) * \frac{1}{4(s + 0) * (s + 0,5)^2} \right\}_{s=0} = \left\{ \frac{1}{4(s + 0,5)^2} \right\}_{s=0} = 1$$

$$C_2 = \left\{ (s + 0,5)^2 * \frac{1}{4(s + 0)(s + 0,5)^2} \right\}_{s=-0,5} = \left\{ \frac{1}{4(s + 0)} \right\}_{s=-0,5} = -\frac{1}{2} = -0,5$$

$$C_1 = \left\{ \frac{d}{ds} \left[(s + 0,5)^2 * \frac{1}{4(s + 0)(s + 0,5)^2} \right] \right\}_{s=-0,5} = \left\{ \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{4(s + 0)} \right] \right\}_{s=-0,5} = \left\{ \left[\frac{-1}{4s^2} \right] \right\}_{s=-0,5} = -1$$

Přechodová funkce a přechodová charakteristika

6) $K_1 = 1, C_1 = -1, C_2 = -0,5$

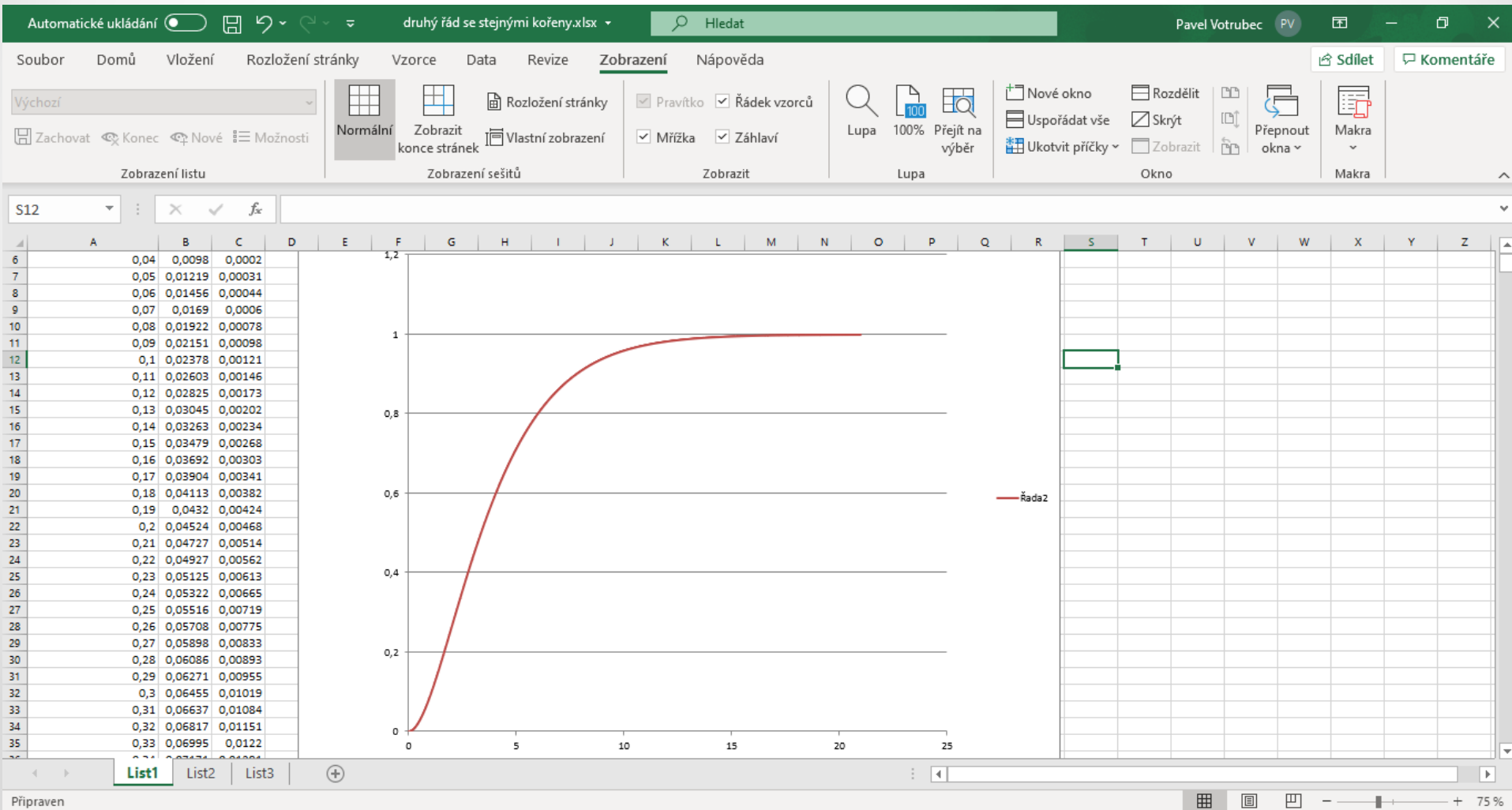
$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+0)} * \frac{1}{4(s+0,5)^2} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{K_1}{(s+0)} + \frac{C_1}{(s+0,5)} + \frac{C_2}{(s+0,5)^2} \right\} =$$

$$= L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{(s+0,5)} - \frac{0,5}{(s+0,5)^2} \right\} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{red}}}{1} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{green}}}{e^{-0,5t}} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{blue}}}{0,5t} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{red}}}{e^{-0,5t}}$$

| | |
|------------|---------------------|
| a | $\frac{a}{s}$ |
| e^{-at} | $\frac{1}{(s+a)}$ |
| te^{-at} | $\frac{1}{(s+a)^2}$ |

Přechodová funkce a přechodová charakteristika

$$7) h(t) = 1 - e^{-0,5t} - 0,5te^{-0,5t}$$



Cvičení na opakování

*Vypočítejte přechodovou funkci
a vytvořte přechodovou charakteristiku*

1) $y' + 0,6y(t) = 0,2u(t)$

2) $4y'' + 16y' + 16y(t) = 20u(t)$

3) $4y'' + 12y' + 8y(t) = 10u(t)$

4) $3y'' + 12y' + 9y(t) = u(t)$

5) $10y'' + 3y' + 0,2y(t) = 10u(t)$

6) $2y'' + 0,6y' + 0,04y(t) = 10u(t)$

Použitá literatura

[1] Ivan Švarc, Branislav Lacko, Ing. Zdeněk Němec, AUTOMATIZACE vydavatelství PC-DIR s.r.o 1995 **str. 45**