Úvod do automatizace 06

Rozklad přenosu systému v parciální zlomky

Autor: Ing. Pavel Votrubec © Dne 5.11.2020 v Ústí nad Labem

Matematické nástroje pro popisy dynamických soustav

- Rozklad přenosu $\boldsymbol{F(s)} = \frac{\boldsymbol{M(s)}}{\boldsymbol{N(s)}}$ v parciální zlomky – různé kořeny jmenovatele
- Je-li dána funkce F(s)

$$\boldsymbol{F(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{M(s)}{k_0(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)\quad * \cdots}}$$

- Kde kořeny jmenovatele s_1, s_2, s_3,.... jsou různé, můžeme ji rozložit v součet parciálních zlomků

$$\boldsymbol{F(s) = \frac{K_1}{s-s_1} + \frac{K_2}{s-s_2} + \frac{K_3}{s-s_3} + \cdots}$$

Konstanty $\boldsymbol{K_1}, \boldsymbol{K_2}, \boldsymbol{K_3}$, ... určíme následujícím způsobem.

Matematické nástroje pro popisy dynamických soustav

$$F(s)=\frac{M(s)}{N(s)}=\frac{M(s)}{k_0(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)\quad *\cdots}$$

$$F(s)=\frac{K_1}{s-s_1}+\frac{K_2}{s-s_2}+\frac{K_3}{s-s_3}+\cdots$$

Pro určení konstant použijeme obecný vzorec:

$$K_i=\left[(s-s_i)\frac{M(s)}{N(s)}\right]_{s=s_i}$$

Matematické nástroje pro popisy dynamických soustav

Prakticky si ukážeme na příkladu

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Kořeny jmenovatele:

$$\boldsymbol{s_1 = -1}$$
$$\boldsymbol{s_2 = -2}$$
$$\boldsymbol{s_3 = -3}$$

Rozklad v parciální zlomky

$$G(s) = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+3}$$

Pro určení jednotlivých konstant ***K*** dosadíme do obecného vzorce:

$$\boldsymbol{K_i = \left[(s - s_i)\frac{M(s)}{N(s)}\right]_{s=s_i}}$$

Matematické nástroje pro popisy dynamických soustav

$$K_1 = \left[(s+1)\frac{M(s)}{N(s)}\right]_{s=-1} = \left[\cancel{(s+1)}\frac{1}{\cancel{(s+1)}(s+2)(s+3)}\right]_{s=-1} = \left[\frac{1}{(s+2)(s+3)}\right]_{s=-1} = \left[\frac{1}{(-1+2)(-1+3)}\right] = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$K_2 = \left[(s+2)\frac{M(s)}{N(s)}\right]_{s=-2} = \left[\cancel{(s+2)}\frac{1}{(s+1)\cancel{(s+2)}(s+3)}\right]_{s=-2} = \left[\frac{1}{(s+1)(s+3)}\right]_{s=-2} = \left[\frac{1}{(-2+1)(-2+3)}\right] = -1$$

$$K_3 = \left[(s+3)\frac{M(s)}{N(s)}\right]_{s=-3} = \left[\cancel{(s+3)}\frac{1}{(s+1)(s+2)\cancel{(s+3)}}\right]_{s=-3} = \left[\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right]_{s=-3} = \left[\frac{1}{(-3+1)(-3+2)}\right] = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Matematické nástroje pro popisy dynamických soustav

- Příklad rozklad přenosu $\boldsymbol{G(s)} = \frac{\boldsymbol{M(s)}}{\boldsymbol{N(s)}}$ v parciální zlomky

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$K_1 = 0{,}5;$$
$$K_2 = -1;$$
$$K_3 = 0{,}5$$

$$\boldsymbol{G(s)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+3} = \frac{\mathbf{0{,}5}}{\boldsymbol{s}+\mathbf{1}} + \frac{\mathbf{-1}}{\boldsymbol{s}+\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{0{,}5}}{\boldsymbol{s}+\mathbf{3}}$$

Matematické nástroje pro popisy dynamických soustav

- Rozklad přenosu $F(s) = \frac{M(s)}{N(s)}$ v parciální zlomky – násobné kořeny jmenovatele
- Je-li dána funkce F(s)

$$\boldsymbol{F(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{M(s)}{k_0(s-s_1)^n(s-s_2)(s-s_3)\quad * \cdots}}$$

- Kde s_1 je n-násobný kořen,
  $s_2, s_3 \ldots$ kořeny různé jednonásobné, potom je roklad :

$$\boldsymbol{F(s) = \frac{C_1}{s-s_1} + \frac{C_2}{(s-s_1)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(s-s_1)^n} + \frac{K_2}{s-s_2} + \frac{K_3}{s-s_3} + \cdots}$$

Konstanty C_1 , C_2 , C_n , K_2, K_3, … určíme následujícím způsobem.

Matematické nástroje pro popisy dynamických soustav

Konstanty C_1 , C_2 , C_n , K_2, K_3, … určíme následujícím způsobem.

$$F(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{M(s)}{k_0(s-s_1)^n(s-s_2)(s-s_3)*\cdots}$$

$$F(s) = \frac{C_1}{s-s_1} + \frac{C_2}{(s-s_1)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(s-s_1)^n} + \frac{K_2}{s-s_2} + \frac{K_3}{s-s_3} + \cdots$$

$$K_i = \left[(s-s_i)\frac{M(s)}{N(s)}\right]_{s=s_i}$$

Vzorec pro kořeny různé jednonásobné

Matematické nástroje pro popisy dynamických soustav

Konstanty C_1, C_2, C_n, K_2, K_3, … určíme následujícím způsobem.

$$\boldsymbol{F(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{M(s)}{k_0(s-s_1)^n(s-s_2)(s-s_3)*\cdots}}$$

$$\boldsymbol{F(s) = \frac{C_1}{s-s_1} + \frac{C_2}{(s-s_1)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(s-s_1)^n} + \frac{K_2}{s-s_2} + \frac{K_3}{s-s_3} + \cdots}$$

$$\boldsymbol{C_n = \left[(s-s_i)^n \frac{M(s)}{N(s)}\right]_{s=s_i}}$$

Vzorec pro koeficient $\boldsymbol{C_n}$ násobného kořenu

Vzorec pro koeficient $\boldsymbol{C_{n-1}}$ násobného kořenu

$$\boldsymbol{C_{n-1} = \frac{1}{1!}\left\{\frac{d}{ds}\left[(s-s_i)^n \frac{M(s)}{N(s)}\right]\right\}_{s=s_i}}$$

Matematické nástroje pro popisy dynamických soustav

Konstanty $C_1, C_2, C_n, K_2, K_3, \ldots$ určíme následujícím způsobem.

$$\boldsymbol{F(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{M(s)}{k_0(s-s_1)^n(s-s_2)(s-s_3)*\cdots}}$$

$$\boldsymbol{F(s) = \frac{C_1}{s-s_1} + \frac{C_2}{(s-s_1)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(s-s_1)^n} + \frac{K_2}{s-s_2} + \frac{K_3}{s-s_3} + \cdots}$$

Vzorec pro koeficient $\boldsymbol{C_{n-2}}$ násobného kořenu

$$\boldsymbol{C_{n-2} = \frac{1}{2!}\left\{\frac{d^2}{ds^2}\left[(s-s_i)^n\frac{M(s)}{N(s)}\right]\right\}_{s=s_i}}$$

Klíčové vzorce pro realizaci derivace s „L“ operátorem

CALCULUS — DERIVATIVES AND LIMITS

DERIVATIVE DEFINITION

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

BASIC PROPERTIES

$$(cf(x))' = c(f'(x))$$

$$(f(x)\pm g(x))' = f'(x)\pm g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

MEAN VALUE THEOREM

If f is differentiable on the interval (a,b) and continuous at the end points there exists a c in (a,b) such that

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

PRODUCT RULE

$$(f(x)g(x))' = f(x)'g(x) + f(x)g(x)'$$

QUOTIENT RULE

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

POWER RULE

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

CHAIN RULE

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$$

COMMON DERIVATIVES

$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x\tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x\cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x\ln(a)$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x},\ x>0$$

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a(x)) = \frac{1}{x\ln(a)}$$

CHAIN RULE AND OTHER EXAMPLES

$$\frac{d}{dx}([f(x)]^n) = n[f(x)]^{n-1}f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(e^{f(x)}) = f'(x)e^{f(x)}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln[f(x)]) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin[f(x)]) = f'(x)\cos[f(x)]$$

$$\frac{d}{dx}(\cos[f(x)]) = -f'(x)\sin[f(x)]$$

$$\frac{d}{dx}(\tan[f(x)]) = f'(x)\sec^2[f(x)]$$

$$\frac{d}{dx}(\sec[f(x)]) = f'(x)\sec[f(x)]\tan[f(x)]$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}[f(x)]) = \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)^{g(x)}) = f(x)^{g(x)}\left(\frac{g(x)f'(x)}{f(x)} + \ln(f(x))\,g'(x)\right)$$

PROPERTIES OF LIMITS

These properties require that the limit of $f(x)$ and $g(x)$ exist

$$\lim_{x\to a}[cf(x)] = c\lim_{x\to a}f(x)$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a}f(x)\lim_{x\to a}g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}\quad\text{if } \lim_{x\to a}g(x)\neq 0$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a}f(x)\right]^n$$

LIMIT EVALUATION METHOD – FACTOR AND CANCEL

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-x-12}{x^2+3x} = \lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-4)}{x(x+3)} = \lim_{x\to -3}\frac{(x-4)}{x} = \frac{7}{3}$$

L'HOPITAL'S RULE

If $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ or $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ then $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

LIMIT EVALUATIONS AT +-∞

$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ and $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

$\lim_{x\to\infty}\ln(x) = \infty$ and $\lim_{x\to 0^+}\ln(x) = -\infty$

If $r>0$ then $\lim_{x\to\infty}\frac{c}{x^r} = 0$

If $r>0$ & x^r is real for $x<0$ then $\lim_{x\to-\infty}\frac{c}{x^r} = 0$

$\lim_{x\to\pm\infty} x^r = \infty$ for even r

$\lim_{x\to\infty} x^r = \infty$ & $\lim_{x\to-\infty} x^r = -\infty$ for odd r

Základní vlastnosti:

$$\frac{d}{ds}(c) = (c)' = 0$$

$$\frac{d}{ds}(4) = (4)' = 0$$

$$(cf(s))' = c(f'(s))$$

$$(4f(s))' = 4(f'(s))$$

$$\frac{d}{ds}(s^n) = (s^n)' = ns^{n-1}$$

$$(s^2)' = 2s$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

Matematické nástroje pro popisy dynamických soustav

Příklad: $F(s) = \dfrac{s^2+s+3}{(s+2)^2(s+1)}$

Rozklad v parciální zlomky

$$F(s) = \frac{s^2+s+3}{(s+2)^2(s+1)} = \frac{C_1}{s+2} + \frac{C_2}{(s+2)^2} + \frac{K}{s+1}$$

Pomocný vzorec pro první derivaci zlomku

$$K = \left[\frac{s^2+s+3}{(s+2)^2}\right]_{s=-1} = 3 \qquad C_2 = \left[\frac{s^2+s+3}{s+1}\right]_{s=-2} = -5 \qquad \left(\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}\right)' = \frac{\boldsymbol{u'v-uv'}}{\boldsymbol{v^2}}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{s^2+s+3}{s+1}\right) = \frac{(2s+1)(s+1)-(s^2+s+3)}{(s+1)^2}$$

+3 -5

-3 -1 5

$$C_1 = \left[\frac{d}{ds}\left(\frac{s^2+s+3}{s+1}\right)\right]_{s=-2} = \left[\frac{(2s+1)(s+1)-(s^2+s+3)}{(s+1)^2}\right]_{s=-2} = -2$$

-1

Matematické nástroje pro popisy dynamických soustav

Příklad: $$F(s) = \frac{s^2 + s + 3}{(s + 2)^2 (s + 1)}$$

$$C_1 = -2; \quad C_2 = -5; \quad K = 3$$

$$F(s) = \frac{s^2+s+3}{(s+2)^2(s+1)} = \frac{C_1}{s+2} + \frac{C_2}{(s+2)^2} + \frac{K}{S+1} = \frac{-2}{s+2} + \frac{-5}{(s+2)^2} + \frac{3}{s+1}$$

Cvičení na opakování

Proveďte rozklad přenosu pólů a nul v parciální zlomky

1. Přechodovou funkci $\boldsymbol{H(s)} = \frac{\mathbf{0{,}2}}{\boldsymbol{s(s+0{,}6)}}$
2. Přechodovou funkci $\boldsymbol{H(s)} = \frac{\mathbf{5}}{\boldsymbol{s(s+2)(s+3)}}$
3. Přechodovou funkci $\boldsymbol{H(s)} = \frac{\mathbf{4}}{\boldsymbol{s(s+2)^2}}$
4. Přechodovou funkci $\boldsymbol{H(s)} = \frac{\mathbf{9}}{\boldsymbol{s(10s+1)(8s+1)}}$
5. Přechodovou funkci $\boldsymbol{H(s)} = \frac{\mathbf{4}}{\boldsymbol{s(0{,}5s+1)^2}}$

Příklad č. 1

Přechodovou funkci $H(s) = \frac{0{,}2}{s(s+0{,}6)} = \frac{K_1}{s+0} + \frac{K_2}{(s+0{,}6)} = \frac{0{,}\overline{3}}{s+0} - \frac{0{,}\overline{3}}{(s+0{,}6)}$

Pomocný výpočet konstant:

$$K_1 = \left[\cancel{(s+0)}\frac{0{,}2}{\cancel{(s+0)}(s+0{,}6)}\right]_{s=0} = \frac{1}{3}$$

$$K_2 = \left[\cancel{(s+0{,}6)}\frac{0{,}2}{(s+0)\cancel{(s+0{,}6)}}\right]_{s=-0{,}6} = -\frac{1}{3}$$

Příklad č. 2

Přechodovou funkci $H(s) = \frac{5}{s(s+2)(s+3)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+2)} + \frac{K_2}{(s+3)} =$

$= \frac{5}{6s} - \frac{5}{2(s+2)} + \frac{5}{3(s+3)} = \frac{0{,}8\overline{3}}{s} - \frac{2{,}5}{(s+2)} + \frac{1{,}\overline{6}}{(s+3)}$

Pomocný výpočet konstant:

$$\mathrm{K}_1 = \left[\cancel{(s+0)}\frac{5}{\cancel{(s+0)}(s+2)(s+3)}\right]_{s=0} = \frac{5}{6} = 0{,}8\overline{3}$$

$$\mathrm{K}_2 = \left[\cancel{(s+2)}\frac{5}{(s+0)\cancel{(s+2)}(s+3)}\right]_{s=-2} = -\frac{5}{2} = -2{,}5$$

$$\mathrm{K}_3 = \left[\cancel{(s+3)}\frac{5}{(s+0)(s+2)\cancel{(s+3)}}\right]_{s=-3} = \frac{5}{3} = 1{,}\overline{6}$$

Příklad č. 3

Přechodovou funkci $H(s) = \frac{4}{s(s+2)^2} = \frac{C_1}{(s+2)^1} + \frac{C_2}{(s+2)^2} + \frac{K_2}{s} =$

$$= \frac{-3}{2(s+2)} + \frac{-2}{(s+2)^2} + \frac{1}{s} = \frac{-1}{s+2} + \frac{-2}{(s+2)^2} + \frac{1}{s}$$

Pomocný výpočet konstant:

$$K_2 = \left[\cancel{s}\frac{4}{\cancel{s}(s+2)^2}\right]_{s=0} = 1$$

$$C_2 = \left[\cancel{(s+2)^2}\frac{4}{s\cancel{(s+2)^2}}\right]_{s=-2} = -2$$

$$C_1 = \frac{1}{1!}\left\{\frac{d}{ds}\left[\cancel{(s+2)^2}\frac{4}{s\cancel{(s+2)^2}}\right]\right\}_{s=-2} = \frac{1}{1!}\left\{\frac{-4}{s^2}\right\}_{s=-2} = -1$$

Pomocný vzorec pro první derivaci zlomku:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\left(\frac{4}{s}\right)' = \frac{0 * s - 4 * 1}{s^2}$$

Příklad č. 4

Přechodovou funkci $H(s) = \frac{9}{s(10s+1)(8s+1)} = \frac{9}{80s(s+0{,}1)(s+0{,}125)} =$

$$\frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+0{,}1} + \frac{K_3}{(s+0{,}125)} = \frac{9}{s} - \frac{45}{s+0{,}1} + \frac{36}{(s+0{,}125)}$$

Pomocný výpočet konstant:

$$K_1 = \left[\cancel{s}\,\frac{9}{80\cancel{s}(s+0{,}1)(s+0{,}125)}\right]_{s=0} = 9$$

$$K_2 = \left[\cancel{(s+0{,}1)}\,\frac{9}{80s\cancel{(s+0{,}1)}(s+0{,}125)}\right]_{s=-0.1} = -45$$

$$K_3 = \left[\cancel{(s+0{,}125)}\,\frac{9}{80s(s+0{,}1)\cancel{(s+0{,}125)}}\right]_{s=-0.125} = 36$$

Příklad č. 5

Přechodovou funkci $H(s) = \frac{4}{s(0{,}5s+1)^2} = \frac{4}{0{,}25s(s+2)^2} = \frac{C_1}{s+2} + \frac{C_2}{(s+2)^2} + \frac{K_2}{s} =$

$$= -\frac{16}{s+2} - \frac{8}{(s+2)^2} + \frac{4}{s}$$

Pomocný výpočet konstant:

$$K_2 = \left[\cancel{s}\frac{4}{0{,}25\cancel{s}(s+2)^2}\right]_{s=0} = 4$$

$$C_2 = \left[\cancel{(s+2)^2}\frac{4}{0{,}25s\cancel{(s+2)^2}}\right]_{s=-2} = -8$$

$$C_1 = \frac{1}{1!}\left\{\frac{d}{ds}\left[\cancel{(s+2)^2}\frac{4}{0{,}25s\cancel{(s+2)^2}}\right]\right\}_{s=-2} = \frac{1}{1!}\left\{\frac{-4}{(0{,}25s)^2}\right\}_{s=-2} = -16$$

Pomocný vzorec pro první derivaci zlomku:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\left(\frac{4}{0{,}25s}\right)' = \frac{0 * s - 4 * 0{,}25}{(0{,}25s)^2}$$

Použitá literatura

[1] Ivan Švarc, Branislav Lacko, Ing. Zdeněk Němec, AUTOMATIZACE vydavatelství PC-DIR s.r.o 1995 **str. 42**