Úvod do automatizace 02

Základní matematické nástroje automatizace

Autor: Ing. Pavel Votrubec © Dne 29.9.2020 v Ústí nad Labem

Laplaceova transformace

Je úžasný nástroj pro jednodušší nalezení řešení diferenciálních rovnic.

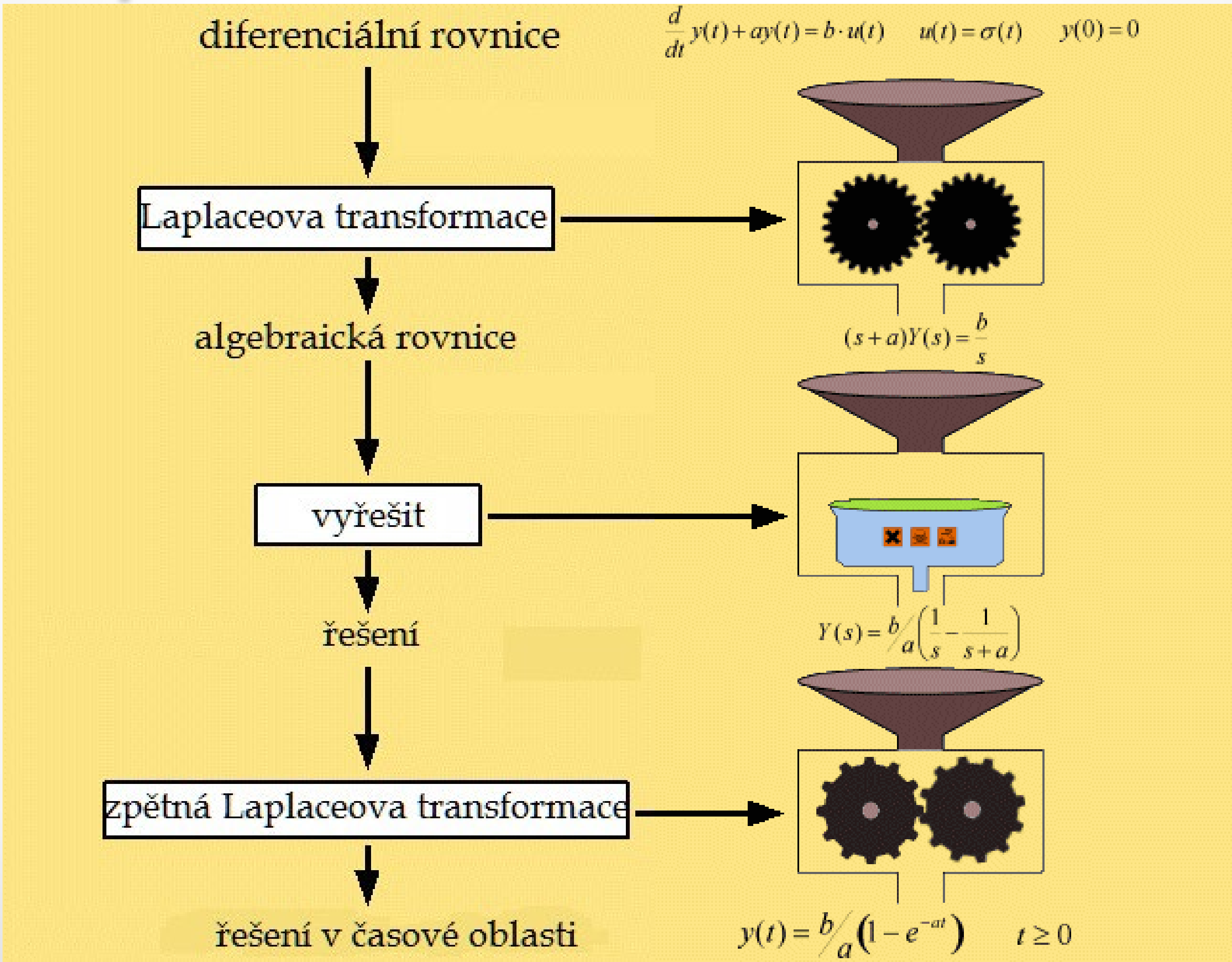
Potřebujete k tomu

- Věty Laplaceovy transformace
- Laplaceův slovník
- Umět nalézt kořeny algebraické rovnice

Poznámka:

(nám bude bohatě stačit umět řešit kvadratickou rovnici, tedy umět vypočítat kořeny kvadratické rovnice, což se mimochodem učí už v matematice na základní škole)

Laplaceova transformace



Laplaceova transformace

Tak začneme.

1. *Vezmeme matematický model fyzikální dynamické soustavy - což je lineární diferenciální rovnice **(LDR).***

Příklad: soustava druhého řádu popsaná LDR

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

aplikujeme věty Laplaceovy transformace

$$L\{a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y(t) = b_0 u(t)\}$$

Po Laplaceově transformaci získáme algebraickou rovnici druhého řádu

$$a_2 s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_0 U(s)$$

Laplaceova transformace

Pro začátek použijeme konkrétní reálná čísla v LDR pro vytvoření představy

*Vezmeme matematický model popsané fyzikální dynamické soustavy, což je pro nás lineární diferenciální rovnice **(LDR).***

Příklad: Máme matematický model soustavy druhého řádu

$$\boldsymbol{4y'' + 4y' + 2y(t) = 2u(t)}$$

aplikujeme věty Laplaceovy transformace

$$\boldsymbol{L\{4y'' + 4y' + 2y(t) = 2u(t)\}}$$

Po Laplaceově transformaci získáme algebraickou rovnici druhého řádu

$$\boldsymbol{4s^2Y(s) + 4sY(s) + 2Y(s) = 2U(s)}$$

A když vyřešíme kvadratickou rovnici , tak získáme i kořeny kvadratické algebraické rovnice a s tím i jednotlivé členy algebraické rovnice.

$$\boldsymbol{Y(s)(2s+1)(2s+1) = 2U(s)}$$

Laplaceova transformace

Laplaceova transformace L přiřazuje funkci f(t) pro čas t ≥0 funkci F(s)

$$L\{f(t)\} = F(s)$$

To samozřejmě platí i pro funkci popsanou jiným písmenem

Například budeme používat:

$$L\{y(t)\} = Y(s)$$
$$L\{u(t)\} = U(s)$$
$$L\{g(t)\} = G(s)$$
$$L\{h(t)\} = H(s)$$

Laplaceova transformace

Příklad na aplikaci Laplaceovy věty o obrazu funkce

$$\boldsymbol{L\{a_0 y(t) = b_0 u(t)\}}$$

A tady jsou obrazy funkcí

$$\boldsymbol{a_0 Y(s) = b_0 U(s)}$$

Laplaceova transformace

Věty Laplaceovy transformace:

- ***Věta o obrazu první derivace***
- ***Věta o obrazu n-té derivace***
- ***Věta o obrazu integrálu***
- ***Věta o linearitě***
- ***Věta o posunutí v originále (tzv. dopravní zpoždění)***

Laplaceova transformace

Věty Laplaceovy transformace:

Věta o obrazu první derivace

$$\boldsymbol{L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)}$$

převádí derivaci v originále na násobení v obraze

A protože my v automatizaci budeme používat nulové počáteční podmínky $f(0) = 0$

Tak naše výsledná věta o první derivaci bude jednoduší

$$\boxed{\boldsymbol{L\{f'(t)\} = sF(s)}}$$

Laplaceova transformace

Příklad na aplikaci Laplaceovy věty o první derivaci

$$L\{a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y(t) = b_0 u(t)\}$$

Tady je první derivace

A toto je obraz první derivace

$$L\{a_1 y'\} = a_1 s Y(s)$$

Laplaceova transformace

Věty Laplaceovy transformace:

Věta o obrazu n-té derivace

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) \ldots$$

Díky nulovým počátečním podmínkám bude naše výsledná věta o n-té derivaci bude mnohem jednoduší

$$\boxed{L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s)}$$

Laplaceova transformace

Příklad na aplikaci Laplaceovy věty o n-té (v tomto případě druhé) derivaci

$$L\{a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y(t) = b_0 u(t)\}$$

Tady je druhá derivace

A toto je obraz druhé derivace

$$L\{a_1 y''\} = a_1 s^2 Y(s)$$

Laplaceova transformace

Věty Laplaceovy transformace:

Věta o obrazu integrálu

$$L\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{1}{s}F(s)$$

převádí integraci v originále na dělení v obraze

Laplaceova transformace

Věty Laplaceovy transformace:

Věta o linearitě

$$\boldsymbol{L\{af(t)+bg(t)\}=aF(s)+bG(s)}$$

V případě že a, b jsou konstanty a f(t), g(t) funkce, a tudíž jejichž Laplaceovy obrazy jsou F(s) , G(s)

Laplaceova transformace

Příklad na aplikaci Laplaceovy věty o linearitě

$$L\{a_2 y'' + a_1 y' + \boldsymbol{a_0 y(t)} = \boldsymbol{b_0 u(t)}\}$$

Tady jsou obrazy funcí s využitou větou o linearitě

$$\boldsymbol{a_0 Y}(s) = \boldsymbol{b_0 U(s)}$$

Laplaceova transformace

Věty Laplaceovy transformace:

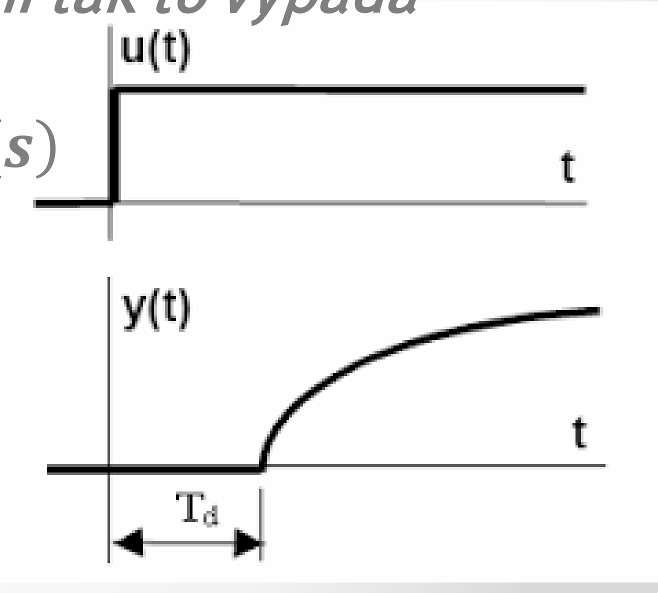
Věta o posunutí v originále (tzv. dopravní zpoždění)

$$L\{f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

A když se to použije pro dopravní zpoždění tak to vypadá takto

$$L\{f(t-T_d)\} = e^{-T_d s}F(s)$$

Přičemž T_d je dopravní zpoždění v [s].



•

Laplaceova transformace

Příklady:

Použij Laplaceovy věty

1) $2y' + 6y(t) = 2u(t) \xrightarrow{L} L\{2y' + 6y(t) = 2u(t)\} \xrightarrow{L} 2sY(s) + 6Y(s) = 2U(s)$

2) $2y'' + 8y' + 8y(t) = 10u(t) \xrightarrow{L} L\{2y'' + 8y' + 8y(t) = 10u(t)\}$

$\xrightarrow{L} 2s^2Y(s) + 8sY(s) + 8Y(s) = 10U(s)$

3) $2y''' + 12y'' + 22y' + 12y(t) = 2u(t) \xrightarrow{L} L\{2y''' + 12y'' + 22y' + 12y(t) = 2u(t)$

$\xrightarrow{L} 2s^3Y(s) + 12s^2Y(s) + 22sY(s) + 12Y(s) = 2U(s)$

4) $3y''' + 18y'' + 33y' + 18y(t) = 12u(t) + 3u'(t)$

$\xrightarrow{L} L\{3y''' + 18y'' + 33y' + 18y(t) = 12u(t) + 3u'(t)\}$

$\xrightarrow{L} 3s^3Y(s) + 18s^2Y(s) + 33sY(s) + 18Y(s) = 12U(s) + 3sU(s)$

Laplaceova transformace

Příklady:

Použij Laplaceovy věty

1) $\mathbf{2y' + 6y(t) = 2u(t)}$ $\xrightarrow{L}$ $L\{\mathbf{2y' + 6y(t) = 2u(t)}\}$ $\xrightarrow{L}$ $2sY(s) + 6Y(s) = 2U(s)$

$$\Rightarrow \quad Y(s)(2s + 6) = 2U(s)$$

$$\Rightarrow \quad 2Y(s)(s + 3) = 2U(s)$$

$$\Rightarrow \quad Y(s)(s + 3) = U(s)$$

Laplaceova transformace

Příklady:

Použij Laplaceovy věty

2) $2y'' + 8y' + 8y(t) = 10u(t)$ $\xrightarrow{L}$ $L\{2y'' + 8y' + 8y(t) = 10u(t)\}$

$\xrightarrow{L}$ $2s^2Y(s) + 8sY(s) + 8Y(s) = 10U(s)$

$\Rightarrow$ $2Y(s)(s^2 + 4s + 4) = 10U(s)$

$\Rightarrow$ $2Y(s)(s^2 + 4s + 4) = 10U(s)$

$\Rightarrow$ $2Y(s)\ (s+2)^2 = 10U(s)$

$\Rightarrow$ $Y(s)\ (s+2)^2 = 5U(s)$

Laplaceova transformace

Příklady:

Použij Laplaceovy věty

3) $\mathbf{2y''' + 12y'' + 22y' + 12y(t) = 2u(t)}$

$$\xrightarrow{L} \quad L\{\mathbf{2y''' + 12y'' + 22y' + 12y(t) = 2u(t)}\}$$

$$\xrightarrow{L} \quad 2s^3Y(s) + 12s^2Y(s) + 22sY(s) + 12Y(s) = 2U(s)$$

$$\Rightarrow \quad 2\mathrm{Y(s)}[s^3 + 6s^2 + 11s + 6] = 2U(s)$$

$$\Rightarrow \quad 2\mathrm{Y(s)}(s+1)(s+2)(s+3) = 2U(s)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Y(s)}(s+1)(s+2)(s+3) = U(s)$$

Laplaceova transformace

Příklady:

Použij Laplaceovy věty

4) $\mathbf{3y''' + 18y'' + 33y' + 18y(t) = 3u'(t) + 12u(t)}$

L $L\{\mathbf{3y''' + 18y'' + 33y' + 18y(t) = 3u'(t) + 12u(t)}\}$

L $3s^3Y(s) + 18s^2Y(s) + 33sY(s) + 18Y(s) = 3sU(s) + 12U(s)$

$3Y(s)\{s^3 + 6s^2 + 11s + 6\} = 3U(s)(s+4)$

$3Y(s)(s+1)(s+2)(s+3) \; = 3U(s)(s+4)$

Použitá literatura

[1] Ivan Švarc, Branislav Lacko, Ing. Zdeněk Němec, AUTOMATIZACE vydavatelství PC-DIR s.r.o 1995

[2] František Plíšek, Diplomová práce: ŘÍZENÍ NEKMITAVÝCH REGULOVANÝCH SOUSTAV
S DOPRAVNÍM ZPOŽDĚNÍM, Brno 2009 https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=17293