Úvod do automatizace 03

Základní matematické nástroje automatizace

Autor: Ing. Pavel Votrubec © Dne 14.10.2020 v Ústí nad Labem

CC BY NC

Matematické popisy dynamických soustav

- ✓ LDR – lineární diferenciální rovnice
- **Přenos systému**
- Nuly a póly přenosu systému
- Přenos ve tvaru časových konstant
- Impulsní funkce a impulsní charakteristika
- Přechodová funkce a přechodová charakteristika
- Frekvenční přenos
- Frekvenční charakteristika v komplexní rovině
- Frekvenční charakteristiky v logaritmických souřadnicích

Matematické popisy dynamických soustav

LDR – lineárně diferenciální rovnici (už známe)

Tady máme obecný výraz pro LDR:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \cdots + \mathbf{a_1 y'} + \mathbf{a_0 y(t)} = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \cdots + \mathbf{b_0 u(t)}$$

Tzv. podmínka fyzikální realizovatelnosti: $n \geq m$

Ale my se potkáme maximálně s touto variantou:

$$\mathbf{a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y(t) = b_0 u(t)}$$

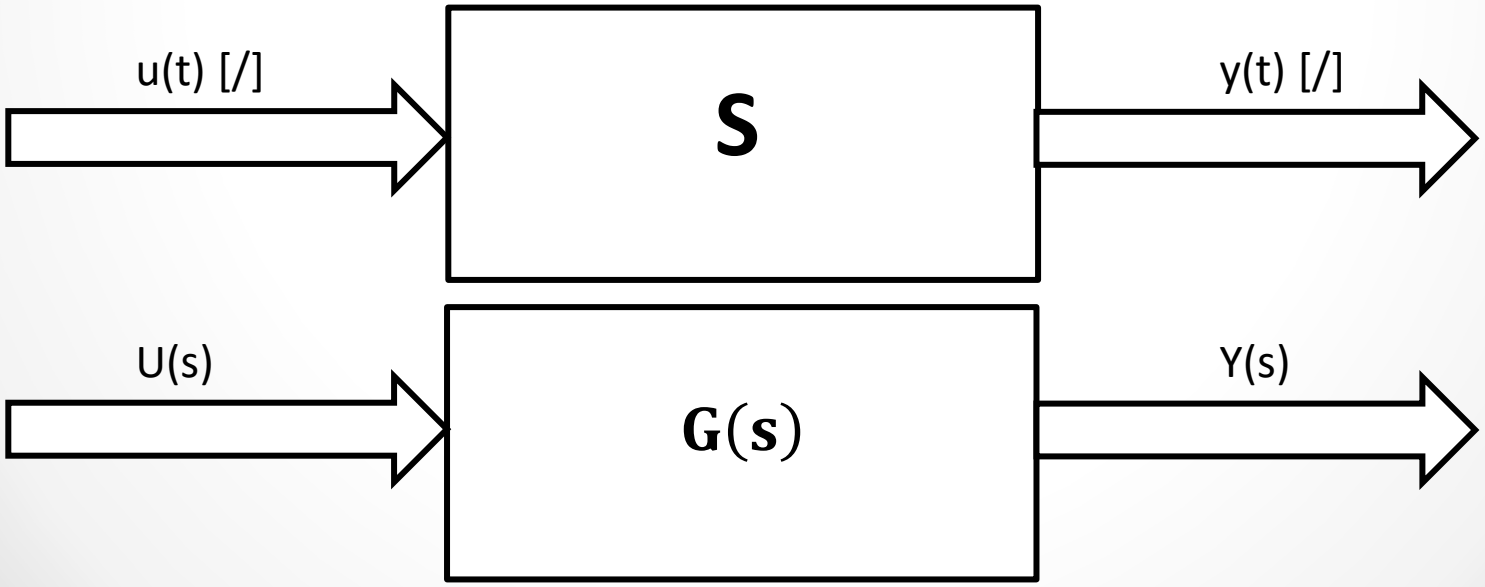
Matematické popisy dynamických soustav

- **Přenos systému**

Je definován jako poměr Laplaceova obrazu výstupní veličiny ku Laplaceova obrazu vstupní veličiny při nulových počátečních podmínkách.

$$G(s) = \frac{L\{y(t)\}}{L\{u(t)\}} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Nulové počáteční podmínky

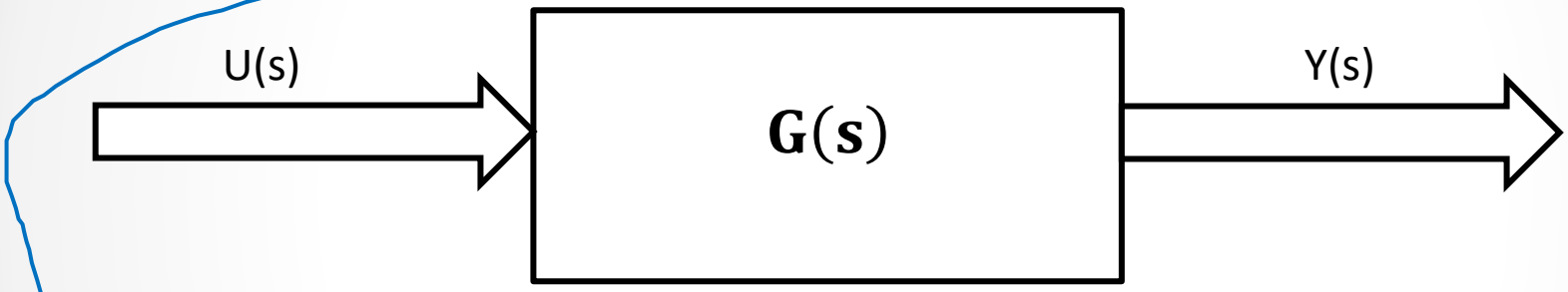


Matematické popisy dynamických soustav

- **Přenos systému**

$$G(s) = \frac{L\{y(t)\}}{L\{u(t)\}} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Nulové počáteční podmínky



$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y(t) = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \cdots + b_0 u(t)$$

$$L\{a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y(t) = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \cdots + b_0 u(t)\}$$

$$a_n s^{(n)} Y(s) + \cdots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_m s^{(m)} U(s) + \cdots + b_0 U(s)$$

$$Y(s)[a_n s^{(n)} + \cdots + a_1 s + a_0] = U(s)[b_m s^{(m)} + \cdots b_1 s + b_0]$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^{(m)} + \cdots b_1 s + b_0}{a_n s^{(n)} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

Matematické popisy dynamických soustav

- Přenos systému – příklad č.1):

$$2y' + 6y(t) = 2u(t)$$

$$L\{2y' + 6y(t) = 2u(t)\}$$

$$\mathbf{2sY(s) + 6Y(s) = 2U(s)}$$

$$\mathbf{Y(s)(2s + 6) = 2U(s)}$$

$$\mathbf{2Y(s)(s + 3) = 2U(s)}$$

$$\mathbf{Y(s)(s + 3) = U(s)}$$

$$\boldsymbol{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s + 3}}$$

Matematické popisy dynamických soustav

- Přenos systému– příklad č.2):

$$\mathbf{2}y'' + \mathbf{8}y' + \mathbf{8}y(t) = \mathbf{10}u(t)$$

$$L\{\mathbf{2}y'' + \mathbf{8}y' + \mathbf{8}y(t) = \mathbf{10}u(t)\}$$

$$2s^2Y(s) + 8sY(s) + 8Y(s) = 10U(s)$$

$$2Y(s)(s^2 + 4s + 4) = 10U(s)$$

$$Y(s)(s^2 + 4s + 4) = 5U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{5}{s^2 + 4s + 4}$$

$$s_1 = \frac{-4 + \sqrt{4^2 - 4 * 4}}{2} = -2 \qquad s_2 = \frac{-4 - \sqrt{4^2 - 4 * 4}}{2} = -2$$

$$G(s) = \frac{5}{(s+2)^2}$$

Matematické popisy dynamických soustav

Přenos systému – příklad č.3):

$$\mathbf{2}y''' + \mathbf{12}y'' + \mathbf{22}y' + \mathbf{12}y(t) = \mathbf{2}u(t)$$

$$L\{\mathbf{2}y''' + \mathbf{12}y'' + \mathbf{22}y' + \mathbf{12}y(t) = \mathbf{2}u(t)\}$$

$$2s^3Y(s) + 12s^2Y(s) + 22sY(s) + 12Y(s) = 2U(s)$$

$$\mathrm{Y(s)}[2s^3 + 12s^2 + 22s + 12] = 2U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{2s^3 + 12s^2 + 22s + 12}$$

$$G(s) = \frac{2}{2(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Matematické popisy dynamických soustav

Přenos systému– příklad č.4):

$$2y''' + 12y'' + 22y' + 12y(t) = 4u' + 6u(t)$$

$$L\{2y''' + 12y'' + 22y' + 12y(t) = 4u'(t) + 6u(t)\}$$

$$2s^3Y(s) + 12s^2Y(s) + 22sY(s) + 12Y(s) = 4sU(s) + 6U(s)$$

$$Y(s)\{2s^3 + 12s^2 + 22s + 12\} = U(s)(4s + 6)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4s + 6}{2s^3 + 12s^2 + 22s + 12}$$

$$G(s) = \frac{2(2s + 3)}{2(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$

$$G(s) = \frac{2s + 3}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$

Použitá literatura

[1] Ivan Švarc, Branislav Lacko, Ing. Zdeněk Němec, AUTOMATIZACE vydavatelství PC-DIR s.r.o 1995 **str. 41-42**

[2] Pavel Beneš, Branislav Lacko, Ladislav Maixner, Ladislav Šmejkal, Rudolf Voráček, Jindřich Král, Josef Janeček, Jaroslav Semerád, Pavel Souček, Bohumil Šulc, Künzel Gunnar Automatizace a automatizační technika **Automatické řízení 2** Computer Press Brno 2014 **str. 33 až 36**