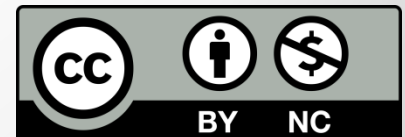


# Úvod do automatizace 07

Impulsní funkce a impulsní charakteristika



# Matematické popisy dynamických soustav

- ✓ LDR – lineární diferenciální rovnice
- ✓ Přenos systému
- ✓ Nuly a póly přenosu systému
- ✓ Přenos systému ve tvaru časových konstant
- **Impulsní funkce a impulsní charakteristika**
- Přechodová funkce a přechodová charakteristika
- Frekvenční přenos
- Frekvenční charakteristika v komplexní rovině
- Frekvenční charakteristiky v logaritmických souřadnicích

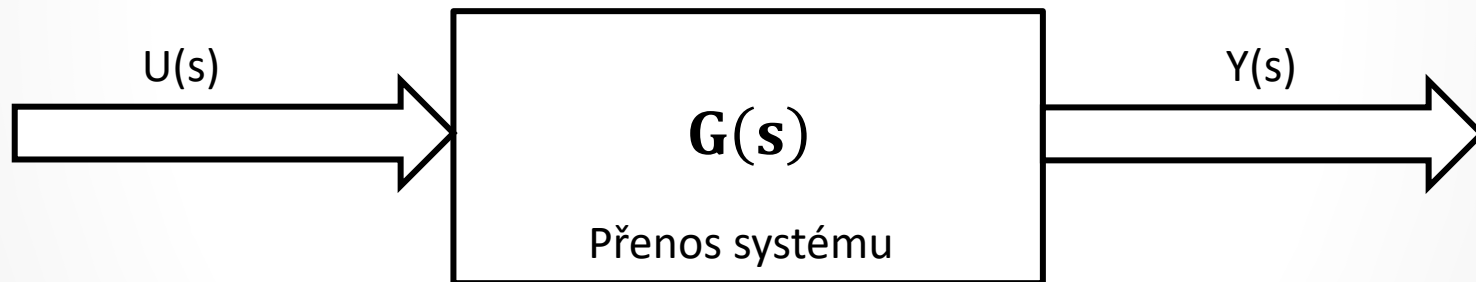


# Matematické popisy dynamických soustav

- Impulsní funkce a impulsní charakteristika

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \text{ přenos systému}$$

Nulové počáteční podmínky

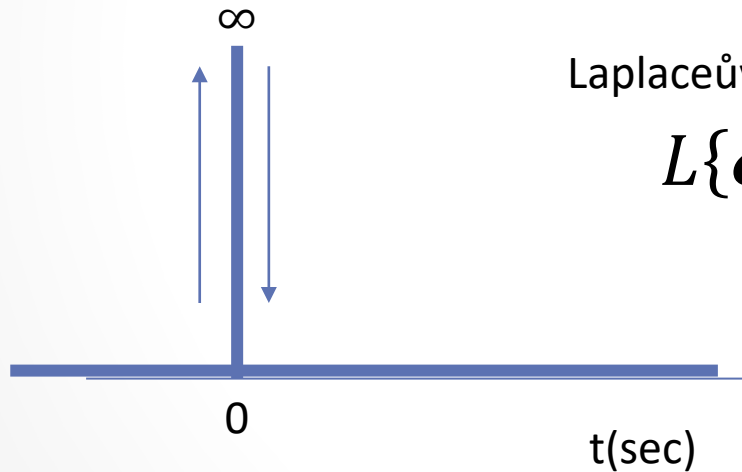


Laplaceův obraz vstupní funkce  $u(t)$

Laplaceův obraz výstupní funkce  $y(t)$

# Matematické popisy dynamických soustav

- Diracův impuls  $\delta(t)$

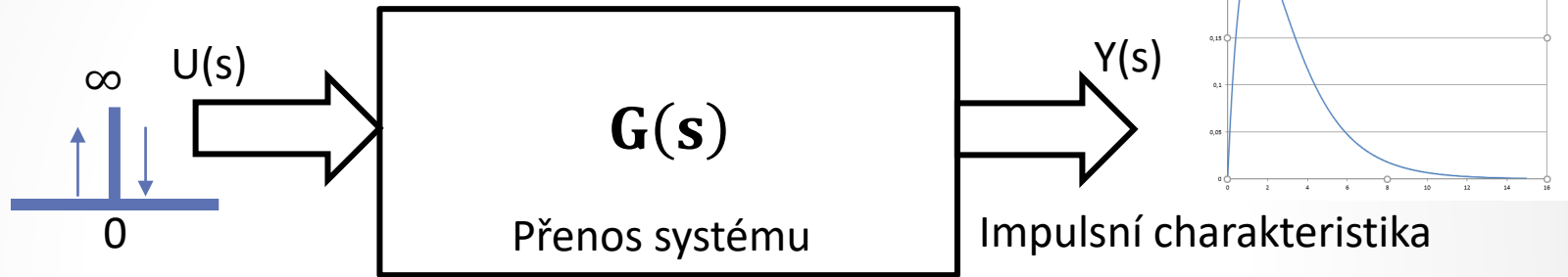


Laplaceův obraz funkce  $\delta(t)$  [*delta t*]

$$L\{\delta(t)\} = 1$$

# Matematické popisy dynamických soustav

- Impulsní funkce a impulsní charakteristika



Laplaceův obraz vstupní funkce  $u(t)$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \text{ přenos systému}$$

Nulové počáteční podmínky

Laplaceův obraz výstupní funkce  $y(t)$

$$Y(s) = G(s) * U(s)$$

Za  $U(s)$  dosadíme Laplaceův obraz Dirakova impulsu

deLaplaceování

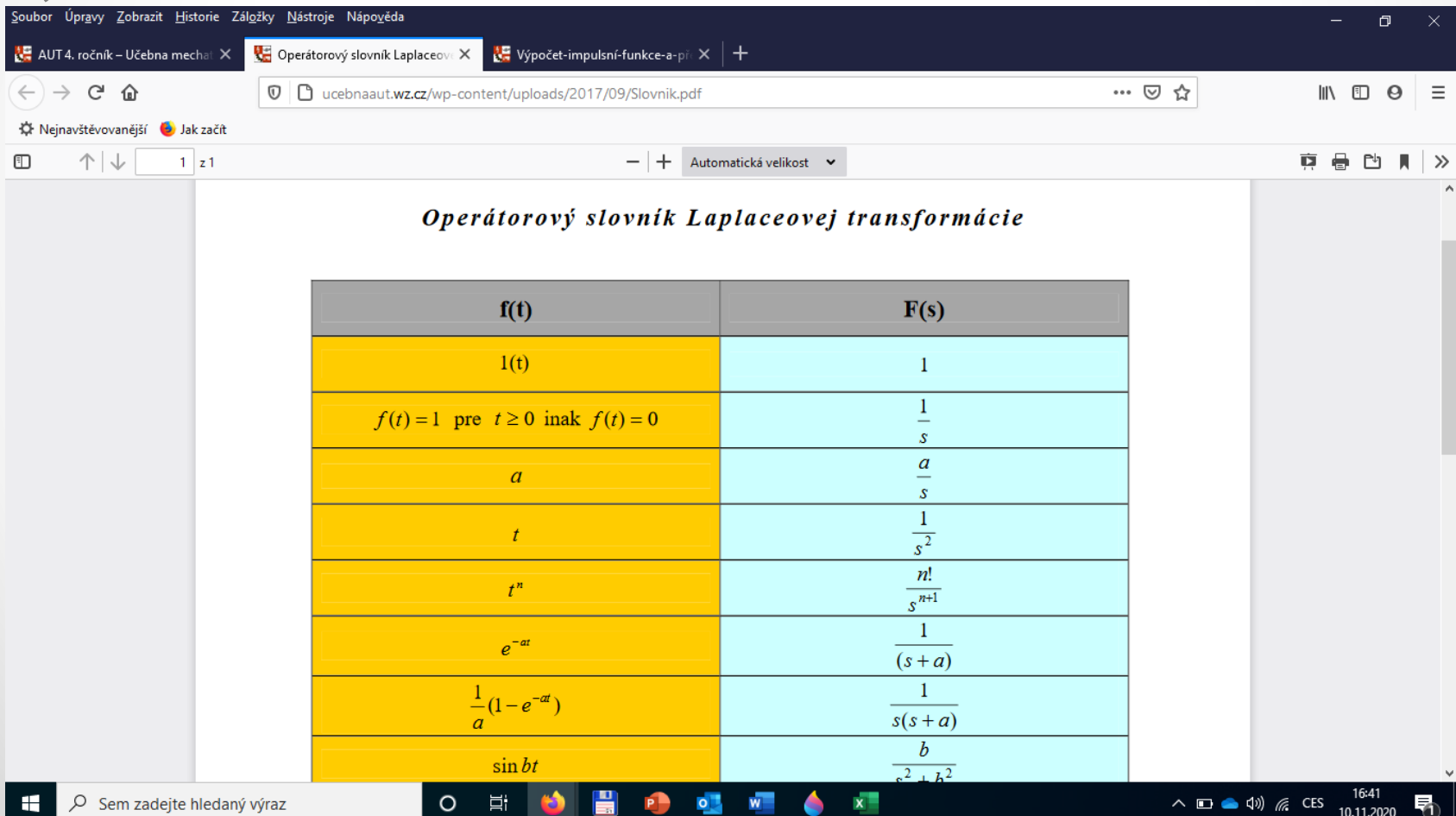
$$Y(s) = G(s) * 1$$

$$g(t) = L^{-1}\{G(s) * 1\}$$

**Získáme impulsní funkci  $g(t)$ .** Když navíc poté do výsledné funkce dosadíme konkrétní čas a zakreslíme do časových souřadnic, získáme (graf) impulsní charakteristiku.

# Impulsní funkce a impulsní charakteristika

- Vytiskněte si Laplaceův slovník, pro další práci ho budete potřebovat. Najdete ho na stránkách laboratoře v menu AUT 4.ročník



The screenshot shows a web browser window with the following details:

- Address bar: [ucebnaaut.wz.cz/wp-content/uploads/2017/09/Slovník.pdf](http://ucebnaaut.wz.cz/wp-content/uploads/2017/09/Slovník.pdf)
- Page title: *Operátorový slovník Laplaceovej transformácie*
- Table with 2 columns: **f(t)** and **F(s)**

<b>f(t)</b>	<b>F(s)</b>
1(t)	1
$f(t) = 1$ pre $t \geq 0$ inak $f(t) = 0$	$\frac{1}{s}$
$a$	$\frac{a}{s}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)}$
$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$

Windows taskbar at the bottom shows the search bar with "Sem zadejte hledaný výraz" and the system tray with the time 16:41 and date 10.11.2020.

# Impulsní funkce a impulsní charakteristika

• *Příklad č.1 na impulsní funkci a impulsní charakteristiku soustavy 1. řádu*

•  $4y' + y(t) = u(t)$

1) Nalezení Laplaceova obrazu LDR

•  $L\{4y' + y(t) = u(t)\}$

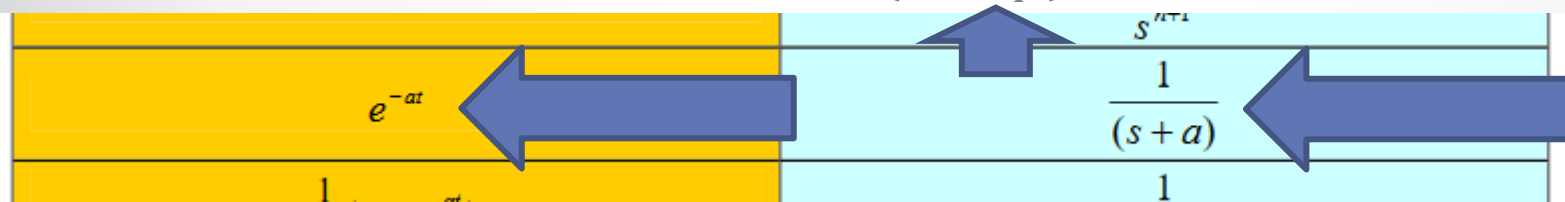
•  $4sY(s) + Y(s) = U(s)$

2) Vytvoření „Přenosu“

•  $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{4s+1}$

3) Nalezení řešení impulsní funkce  $g(t)$  pomocí Laplaceova slovníku

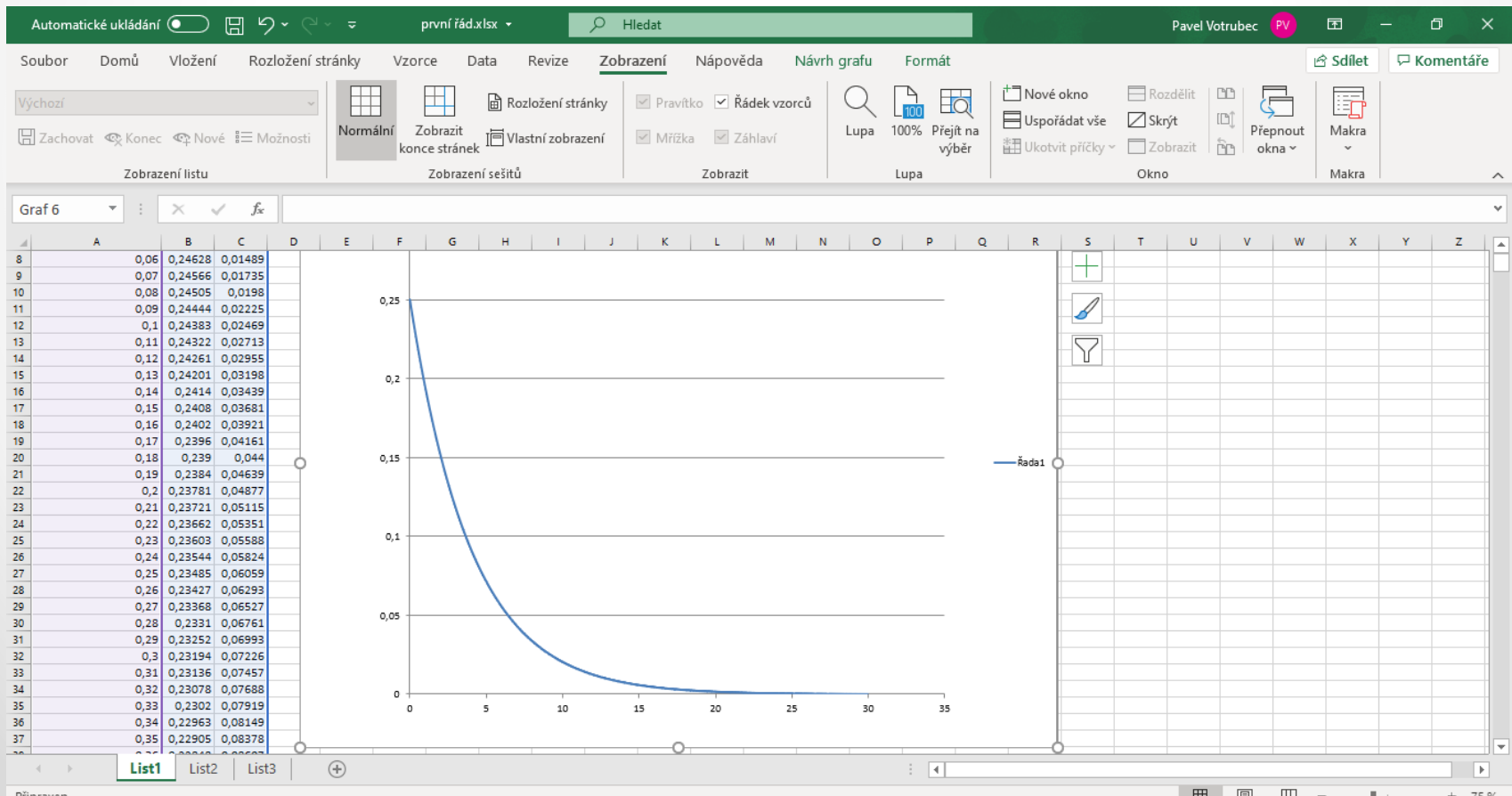
•  $g(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{4s+1} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{4(s+\frac{1}{4})} \right\} = \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}t} = 0,25e^{-0,25t}$



# Impulsní funkce a impulsní charakteristika

- Po naprogramování do Exelu získáte (graf) impulsní charakteristiku  $g(t)$ . Čas  $t$  se zadává od 0 do „nekonečna“ (podle potřeby).

$$4) g(t) = 0,25e^{-0,25t}$$





# Impulsní funkce a impulsní charakteristika

- *Příklad č.2 na impulsní funkci a impulsní charakteristiku soustavy 2. řádu s různými kořeny*
- $2y'' + 3y' + y(t) = u(t)$

1) Nalezení Laplaceova obrazu LDR

$$L\{2y'' + 3y' + y(t) = u(t)\}$$

$$2s^2Y(s) + 3sY(s) + Y(s) = U(s)$$

2) Vytvoření „Přenosu“

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{2s^2 + 3s + 1} = \frac{1}{2(s - s_1)(s - s_2)}$$

# Impulsní funkce a impulsní charakteristika

- 3) Nalezení kořenů jmenovatele pomocí diskriminantu kvadratické rovnice

$$s_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 * 2 * 1}}{2 * 2}$$

$$s_1 = -\frac{1}{2} = -0,5$$

$$s_2 = -1$$

- 4) Výsledný přenos se známými kořeny jmenovatele

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{2s^2 + 3s + 1} = \frac{1}{2(s + 0,5)(s + 1)}$$

- 5) K nalezení řešení impulsní funkce  $g(t)$  pomocí Laplaceova slovníku potřebujeme rozklad přenosu na parciální zlomky

$$g(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{2(s + 0,5)(s + 1)} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{K_1}{(s + 0,5)} + \frac{K_2}{(s + 1)} \right\}$$

# Impulsní funkce a impulsní charakteristika

6) Nalezení čitatele parciálních zlomků

$$K_1 = \left\{ (s + 0,5) * \frac{1}{2(s + 0,5)(s + 1)} \right\}_{s=-0,5} = \left\{ \frac{1}{2(s + 1)} \right\}_{s=-0,5} = 1$$

$$K_2 = \left\{ (s + 1) * \frac{1}{2(s + 0,5)(s + 1)} \right\}_{s=-1} = \left\{ \frac{1}{2(s + 0,5)} \right\}_{s=-1} = -1$$

7) Nalezení řešení impulsní funkce  $g(t)$  pomocí Laplaceova slovníku

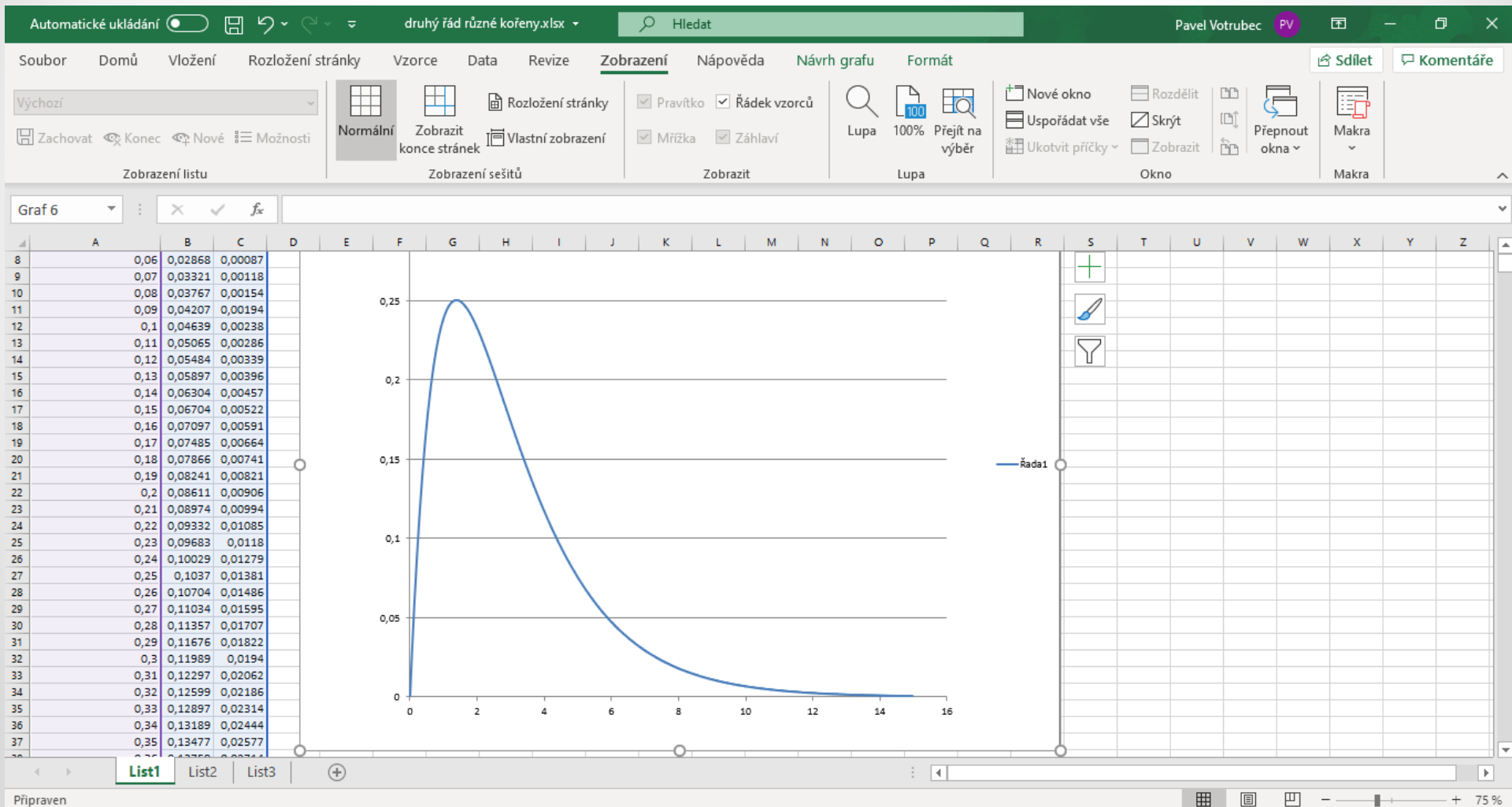
$$\begin{aligned} g(t) &= L^{-1} \left\{ \frac{1}{2(s + 0,5)(s + 1)} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{K_1}{(s + 0,5)} + \frac{K_2}{(s + 1)} \right\} = \\ &= L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+0,5)} - \frac{1}{(s+1)} \right\} = e^{-0,5t} - e^{-t} \end{aligned}$$



$e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)}$
-----------	-------------------

# Impulsní funkce a impulsní charakteristika

8.  $g(t) = e^{-0,5t} - e^{-t}$  realizace impulsní charakteristiky



# Impulsní funkce a impulsní charakteristika

• *Příklad č.3 na impulsní funkci a impulsní charakteristiku soustavy 2. řádu s násobnými kořeny*

•  $4y'' + 4y' + y(t) = u(t)$

1) Nalezení Laplaceova obrazu LDR

•  $L\{4y'' + 4y' + y(t) = u(t)\}$

•  $4s^2Y(s) + 4sY(s) + Y(s) = U(s)$

2) Vytvoření „Přenosu“

• 
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{4s^2 + 4s + 1} = \frac{1}{4(s-s_1)(s-s_2)}$$

3) Nalezení kořenů jmenovatele pomocí diskriminantu kvadratické rovnice

• 
$$s_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4}$$

• 
$$s_{1,2} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} = -0,5$$

# Impulsní funkce a impulsní charakteristika

4) Výsledný přenos se známými kořeny jmenovatele

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{4s^2 + 4s + 1} = \frac{1}{4(s + 0,5)^2}$$

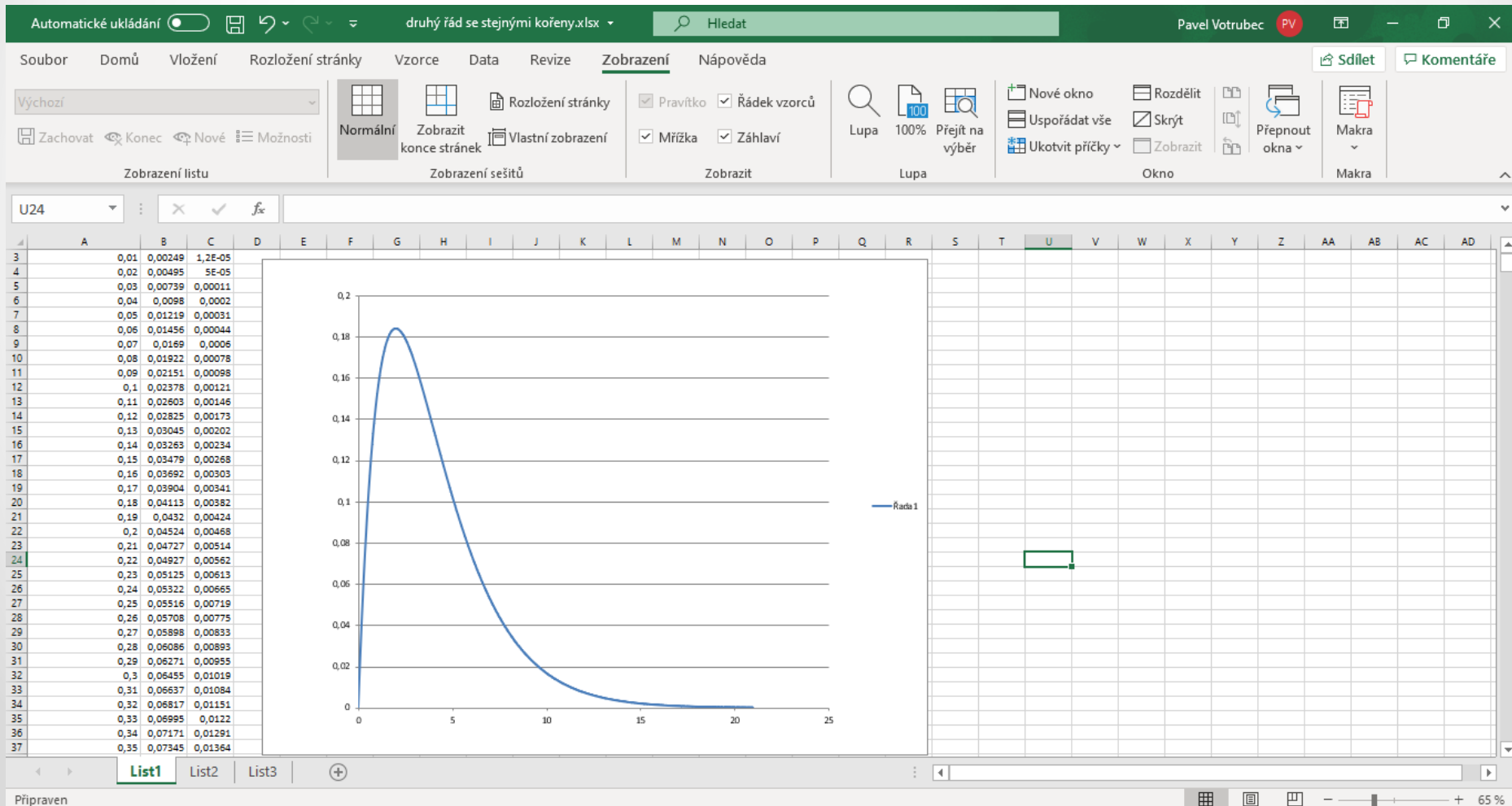
5) Nalezení řešení impulsní funkce  $g(t)$  pomocí Laplaceova slovníku

$$g(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{4(s + 0,5)^2} \right\} = \frac{1}{4} t e^{-0,5t} = 0,25 * t e^{-0,5t}$$



# Impulsní funkce a impulsní charakteristika

$$6) g(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{4(s+0,5)^2} \right\} = \frac{1}{4} t e^{-0,5t} = 0,25 * t e^{-0,5t}$$



# Cvičení na opakování

*Vypočítejte impulsní funkce a impulsní charakteristiky*

$$1) y' + 0,6y(t) = 0,2u(t)$$

$$2) 4y'' + 16y' + 16y(t) = 20u(t)$$

$$3) 4y'' + 12y' + 8y(t) = 10u(t)$$

$$4) 3y'' + 12y' + 9y(t) = u(t)$$

$$5) 10y'' + 3y' + 0,2y(t) = 10u(t)$$

$$6) 2y'' + 0,6y' + 0,04y(t) = 10u(t)$$



## Použitá literatura

[1] Ivan Švarc, Branislav Lacko, Ing. Zdeněk Němec, AUTOMATIZACE vydavatelství PC-DIR s.r.o 1995 **str. 45**