Úvod do automatizace 08

Přechodová funkce a přechodová charakteristika

Autor: Ing. Pavel Votrubec © Dne 16.11.2020 v Ústí nad Labem

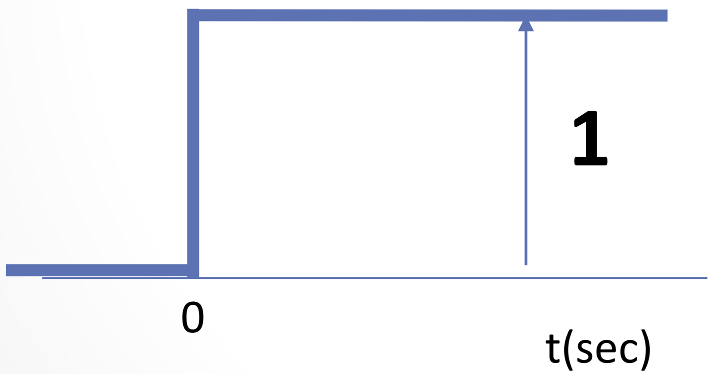
Matematické popisy dynamických soustav

- ✓ LDR – lineární diferenciální rovnice
- ✓ Přenos systému
- ✓ Nuly a póly přenosu systému
- ✓ Přenos systému ve tvaru časových konstant
- ✓ Rozklad přenosu v parciální zlomky
- ✓ Impulsní funkce a impulsní charakteristika
- **Přechodová funkce a přechodová charakteristika**
- Frekvenční přenos
- Frekvenční charakteristika v komplexní rovině
- Frekvenční charakteristiky v logaritmických souřadnicích

Matematické popisy dynamických soustav

- **Jednotkový skok** $\boldsymbol{\eta}(t)$[éta]

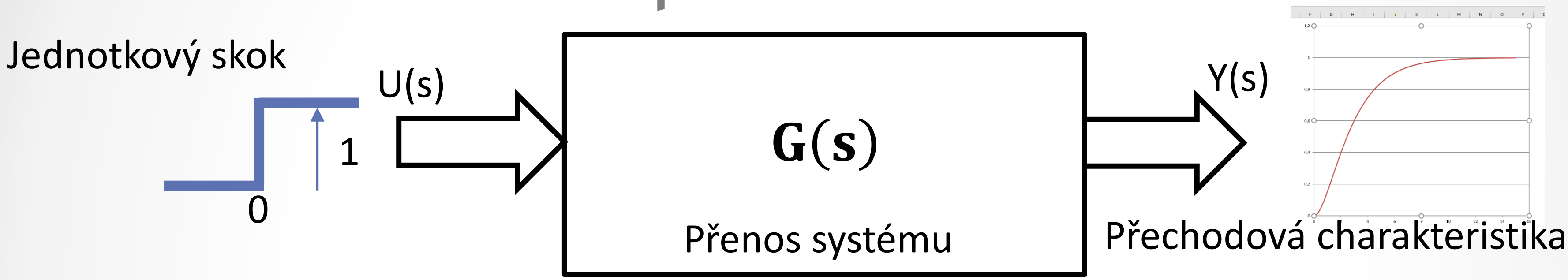
Laplaceův obraz jednotkového skoku, funkce $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{t})$[é$\boldsymbol{ta}$ $\boldsymbol{t}$]



$$L\{\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{t})\} = \frac{1}{s}$$

Matematické popisy dynamických soustav

- **Přechodová funkce a přechodová charakteristika**



Laplaceův obraz vstupní funkce u(t)

Laplaceův obraz výstupní funkce y(t)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad přenos\ systému$$

Nulové počáteční podmínky

$$\mathrm{Y}(s) = G(s) * U(s)$$

Za U(s) dosadíme Laplaceův obraz jednotkového skoku

deLaplaceování

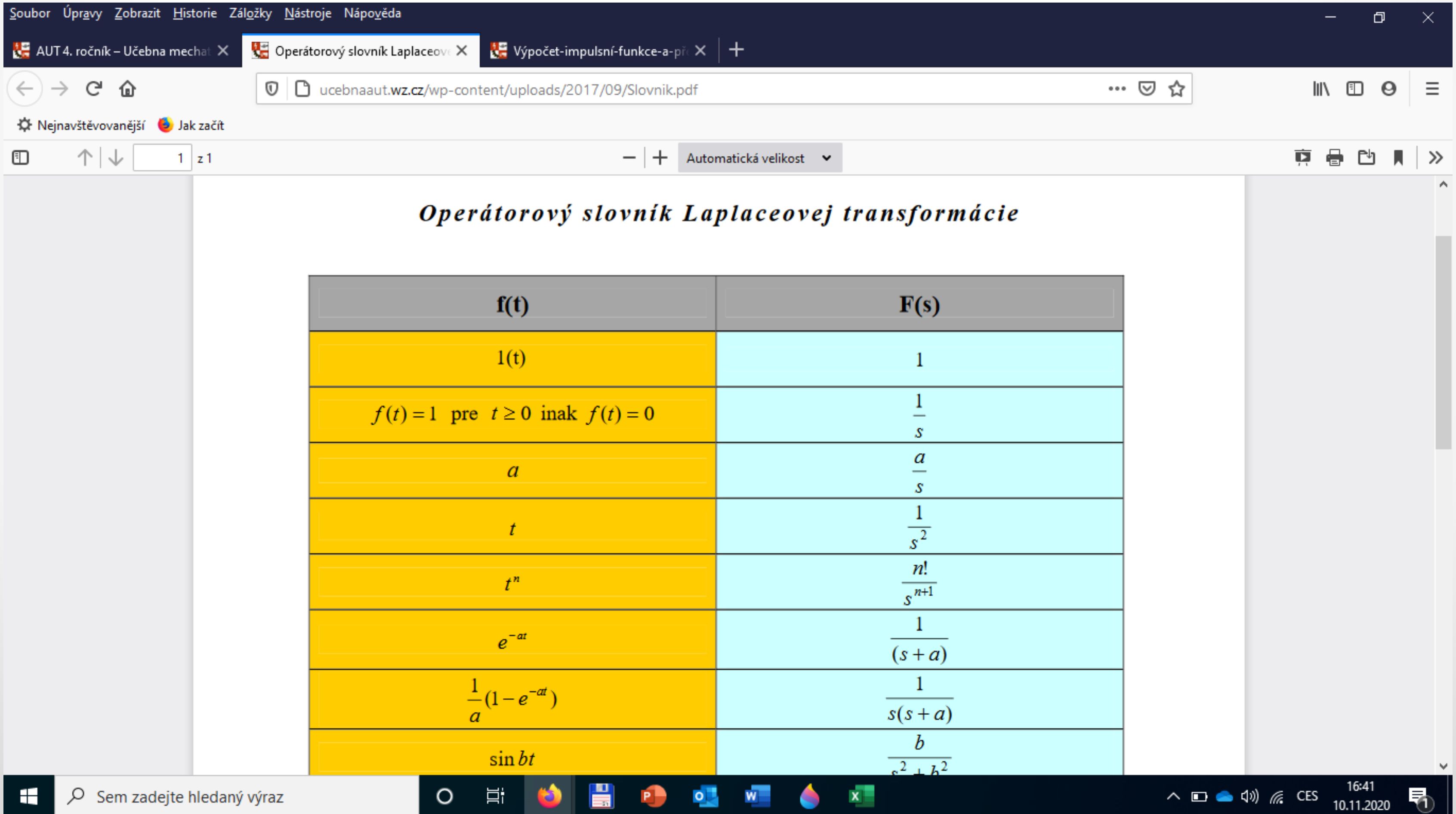
$$\mathrm{H}(s) = G(s) * \frac{1}{s}$$

$$h(t) = L^{-1}\left\{G(s)\frac{1}{s}\right\}$$

Získáme přechodovou funkci $h(t)$. *Když navíc poté do výsledné funkce dosadíme konkrétní čas a zakreslíme do časových souřadnic, získáme (graf) přechodovou charakteristiku.*

Přechodová funkce a přechodová charakteristika

- Laplaceův slovník, pro další práci ho zase budeme potřebovat. Najdete ho na stránkách laboratoře v menu AUT 4.ročník



Operátorový slovník Laplaceovej transformácie

f(t)	F(s)
1(t)	1
$f(t) = 1$ pre $t \geq 0$ inak $f(t) = 0$	$\frac{1}{s}$
a	$\frac{a}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{(s+a)}$
$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$

Přechodová funkce a přechodová charakteristika

- *Příklad č.1 na přechodovou funkci a přechodovou charakteristiku soustavy 1. řádu*
- $4y' + y(t) = u(t)$

1) Nalezení Laplaceova obrazu LDR

- $L\{4y' + y(t) = u(t)\}$
- $4sY(s) + Y(s) = U(s)$

2) Vytvoření „Přenosu“

- $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{4s+1}$

3) Nalezení řešení přechodové funkce h(t) pomocí Laplaceova slovníku

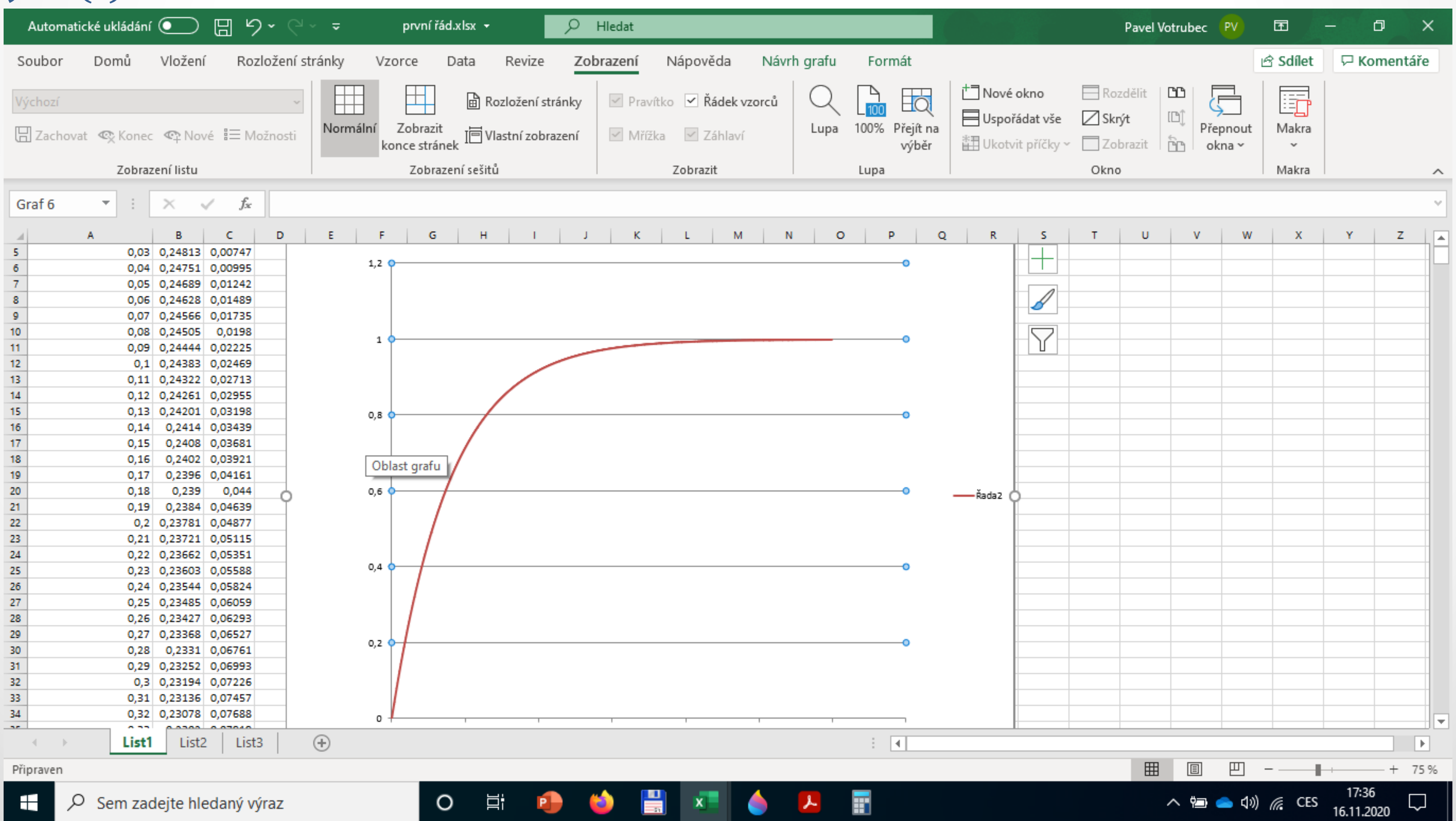
- $\boldsymbol{h(t)} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(4s+1)} * \frac{1}{s}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{4(s+\frac{1}{4})} * \frac{1}{s}\right\} = \frac{1}{4} * \frac{1}{\frac{1}{4}} * \left(1 - e^{\frac{-1}{4}t}\right) =$
- $= \boldsymbol{1 - e^{-0,25t}}$

$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$

Přechodová funkce a přechodová charakteristika

- Po naprogramování do Exelu získáte (graf) přechodovou charakteristiku h(t). Čas t se zadává od 0 do „nekonečna“ (podle potřeby).

4) $h(t) = 1 - e^{-0,25t}$



Přechodová funkce a přechodová charakteristika

- *Příklad č.2 na přechodovou funkci a přechodovou charakteristiku soustavy 2. řádu s různými kořeny*
- $2y'' + 3y' + y(t) = u(t)$

1) Nalezení Laplaceova obrazu LDR

$$L\{2y'' + 3y' + y(t) = u(t)\}$$

$$2s^2Y(s) + 3sY(s) + Y(s) = U(s)$$

2) Vytvoření „Přenosu“

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{2s^2 + 3s + 1} = \frac{1}{2(s - s_1)(s - s_2)}$$

Přechodová funkce a přechodová charakteristika

3) Nalezení kořenů jmenovatele pomocí diskriminantu kvadratické rovnice

$$s_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4*2*1}}{2*2}$$

$$s_1=-\frac{1}{2}=-0{,}5$$

$$s_2=-1$$

4) Výsledný přenos se známými kořeny jmenovatele

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{2s^2+3s+1}=\frac{1}{2(s+0{,}5)(s+1)}$$

5) K nalezení řešení přechodové funkce h(t) pomocí Laplaceova slovníku potřebujeme rozklad přenosu v parciální zlomky

$$\boldsymbol{h(t)}=L^{-1}\left\{\frac{1}{2(s+0{,}5)(s+1)}*\frac{1}{s}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{K_1}{(s+0{,}5)}+\frac{K_2}{(s+1)}+\frac{K_3}{(s+0)}\right\}$$

Přechodová funkce a přechodová charakteristika

5) Nalezení čitatele parciálních zlomků

$$K_1 = \left\{\cancel{(s+0{,}5)} * \frac{1}{2\cancel{(s+0{,}5)}(s+1)} * \frac{1}{(s+0)}\right\}_{s=-0{,}5} = \left\{\frac{1}{2(s+1)} * \frac{1}{s}\right\}_{s=-0{,}5} = -2$$

$$K_2 = \left\{\cancel{(s+1)} * \frac{1}{2(s+0{,}5)\cancel{(s+1)}} * \frac{1}{(s+0)}\right\}_{s=-1} = \left\{\frac{1}{2(s+0{,}5)} * \frac{1}{s}\right\}_{s=-1} = 1$$

$$K_3 = \left\{\cancel{(s+0)} * \frac{1}{2(s+0{,}5)(s+1)} * \frac{1}{\cancel{(s+0)}}\right\}_{s=0} = \left\{\frac{1}{2(s+0{,}5)(s+1)}\right\}_{s=0} = 1$$

Přechodová funkce a přechodová charakteristika

$$K_1 = -2$$

$$K_2 = 1$$

$$K_3 = 1$$

6) Nalezení řešení přenosové funkce h(t) pomocí Laplaceova slovníku

$$\boldsymbol{h(t)} = L^{-1}\left\{\frac{1}{2(s+0{,}5)(s+1)} * \frac{1}{(s+0)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{K_1}{(s+0{,}5)} + \frac{K_2}{(s+1)} + \frac{K_3}{(s+0)}\right\} =$$

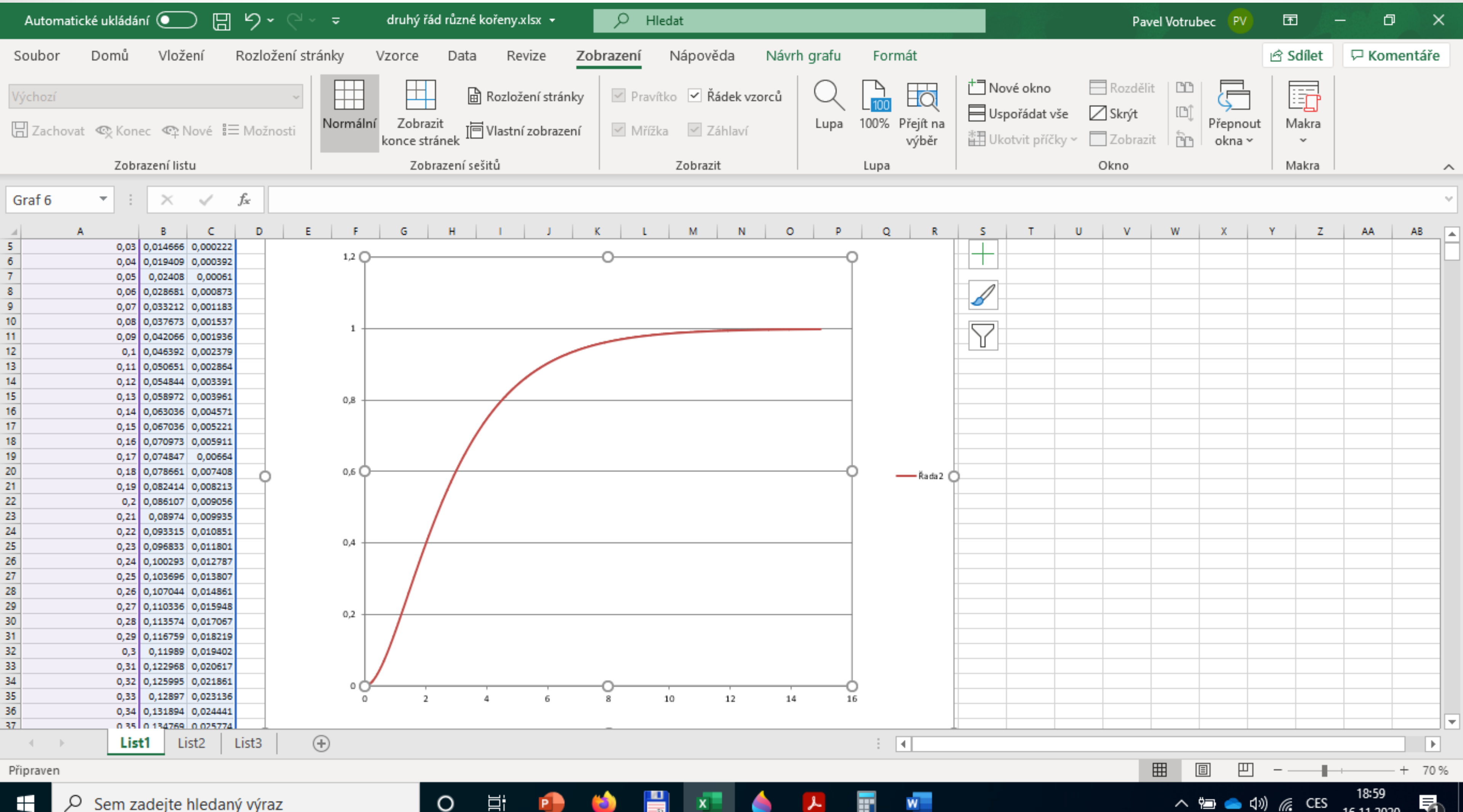
$$= L^{-1}\left\{\frac{-2}{(s+0{,}5)} + \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{s}\right\} = -2e^{-0{,}5t} + e^{-t} + 1$$

e^{-at}	$\frac{1}{(s+a)}$

a	$\frac{a}{s}$

Přechodová funkce a přechodová charakteristika

7. $h(t) = -2e^{-0,5t} + e^{-t} + 1$ realizace přechodové charakteristiky



Přechodová funkce a přechodová charakteristika

- *Příklad č.3 na přechodovou funkci a přechodovou charakteristiku soustavy 2. řádu s násobnými kořeny*
- $4y'' + 4y' + y(t) = u(t)$

1) Nalezení Laplaceova obrazu LDR

- $L\{4y'' + 4y' + y(t) = u(t)\}$
- $4s^2Y(s) + 4sY(s) + Y(s) = U(s)$

2) Vytvoření „Přenosu“

- $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{4s^2+4s+1} = \frac{1}{4(s-s_1)(s-s_2)}$

3) Nalezení kořenů jmenovatele pomocí diskriminantu kvadratické rovnice

- $s_{1,2}= \frac{-4\pm\sqrt{4^2-4*4*1}}{2*4}$
- $s_{1,2} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$

Přechodová funkce a přechodová charakteristika

4) Výsledný přenos se známými kořeny jmenovatele

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{4s^2 + 4s + 1} = \frac{1}{4(s+0{,}5)^2}$$

5) K nalezení řešení přechodové funkce h(t) pomocí Laplaceova slovníku potřebujeme rozklad přenosu v parciální zlomky

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{t}) = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+0)} * \frac{1}{4(s+0{,}5)^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{K_1}{(s+0)} + \frac{C_1}{(s+0{,}5)} + \frac{C_2}{(s+0{,}5)^2}\right\}$$

$$K_1 = \left\{(s+0) * \frac{1}{4(s+0) * (s+0{,}5)^2}\right\}_{s=0} = \left\{\frac{1}{4(s+0{,}5)^2}\right\}_{s=0} = 1$$

$$C_2 = \left\{(s+0{,}5)^2 * \frac{1}{4(s+0)(s+0{,}5)^2}\right\}_{s=-0{,}5} = \left\{\frac{1}{4(s+0)}\right\}_{s=-0{,}5} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$$

$$C_1 = \frac{1}{1!}\left\{\frac{d}{ds}\left[(s+0{,}5)^2 * \frac{1}{4(s+0)(s+0{,}5)^2}\right]\right\}_{s=-0{,}5} = \left\{\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{4(s+0)}\right]\right\}_{s=-0{,}5} = \left\{\left[\frac{-1}{4s^2}\right]\right\}_{s=-0{,}5}$$

$$= -1$$

Přechodová funkce a přechodová charakteristika

6) $K_1 = 1, C_1 = -1, C_2 = -0{,}5$

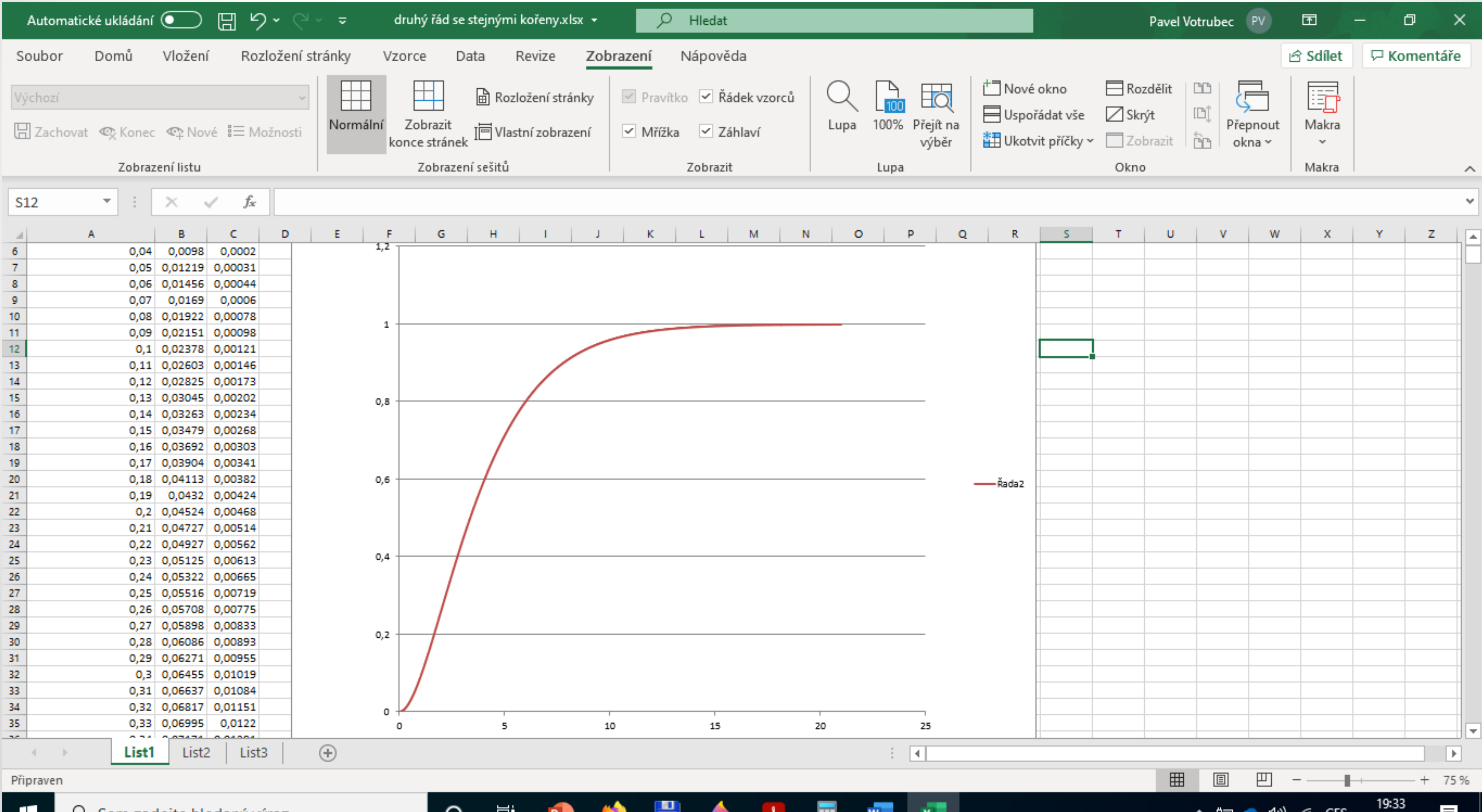
$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+0)} * \frac{1}{4(s+0{,}5)^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{K_1}{(s+0)} + \frac{C_1}{(s+0{,}5)} + \frac{C_2}{(s+0{,}5)^2}\right\} =$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+0{,}5)} - \frac{0{,}5}{(s+0{,}5)^2}\right\} = \mathbf{1 - e^{-0{,}5t} - 0{,}5te^{-0{,}5t}}$$

a	$\frac{a}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{(s+a)}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$

Přechodová funkce a přechodová charakteristika

7) $h(t) = 1 - e^{-0,5t} - 0,5te^{-0,5t}$



	A	B	C
6	0,04	0,0098	0,0002
7	0,05	0,01219	0,00031
8	0,06	0,01456	0,00044
9	0,07	0,0169	0,0006
10	0,08	0,01922	0,00078
11	0,09	0,02151	0,00098
12	0,1	0,02378	0,00121
13	0,11	0,02603	0,00146
14	0,12	0,02825	0,00173
15	0,13	0,03045	0,00202
16	0,14	0,03263	0,00234
17	0,15	0,03479	0,00268
18	0,16	0,03692	0,00303
19	0,17	0,03904	0,00341
20	0,18	0,04113	0,00382
21	0,19	0,0432	0,00424
22	0,2	0,04524	0,00468
23	0,21	0,04727	0,00514
24	0,22	0,04927	0,00562
25	0,23	0,05125	0,00613
26	0,24	0,05322	0,00665
27	0,25	0,05516	0,00719
28	0,26	0,05708	0,00775
29	0,27	0,05898	0,00833
30	0,28	0,06086	0,00893
31	0,29	0,06271	0,00955
32	0,3	0,06455	0,01019
33	0,31	0,06637	0,01084
34	0,32	0,06817	0,01151
35	0,33	0,06995	0,0122

Cvičení na opakování

Vypočítejte přechodovou funkci
a vytvořte přechodovou charakteristiku

1) $y' + 0{,}6y(t) = 0{,}2u(t)$
2) $4y'' + 16y' + 16y(t) = 20u(t)$
3) $4y'' + 12y' + 8y(t) = 10u(t)$
4) $3y'' + 12y' + 9y(t) = u(t)$
5) $10y'' + 3y' + 0{,}2y(t) = 10u(t)$
6) $2y'' + 0{,}6y' + 0{,}04y(t) = 10u(t)$

Použitá literatura

[1] Ivan Švarc, Branislav Lacko, Ing. Zdeněk Němec, AUTOMATIZACE vydavatelství PC-DIR s.r.o 1995 **str. 45**